inteli

Gabarito
Processo Seletivo
2024.1

BEM-VINDOS AO PRIMEIRO PROCESSO SELETIVO ADAPTATIVO DO BRASIL

Este é um gabarito comentado de todas as questões realizadas em nosso processo seletivo – eixo prova, que ocorreu no dia 22/10/2023.

Lembrando que nosso processo é dividido em 4 blocos, onde o candidato percorre uma trilha de acordo com seu desempenho durante a prova. Neste arquivo você irá encontrar todas as questões que foram disponibilizadas, independente do caminho percorrido. Note que, por conta disso, existirão questões parecidas, porém com grau de complexidade diferente.

Além disso, para evitar possíveis fraudes, durante a aplicação da prova, as questões foram embaralhadas randomicamente, por isso, dentro deste caderno solução, decidimos não as numerar. O mesmo ocorreu com as alternativas de cada questão, que também foram embaralhadas durante a prova.

Bons estudos a todos!

Após cadastrar todos os estudantes de uma nova turma do Inteli, o administrador do sistema precisa gerar aleatoriamente senhas provisórias para cada um deles. Estas senhas podem ter quatro ou cinco dígitos e para gerá-las ele procede da seguinte forma:

● Considera-se a data de aniversário do estudante na forma DDMM, isto é, dia de nascimento com dois dígitos e mês de nascimento com dois dígitos.

● Considera-se o número DDMM como x e, então, a senha é dada pela função:

$$S(x) = 2020 + 4x,$$

sendo 2020 escolhido como uma homenagem ao ano de fundação do Inteli.

Por exemplo: Alice nasceu em 04/10/2003. Portanto, sua senha será:

$$2020 + 4 \cdot (0410) = 3660$$

Sabendo-se que a senha de acesso de Maíra é 8428, pode-se afirmar que a data de aniversário dela corresponde a:

17/01
16/02
08/07
21/07
26/12

Gabarito: 16/02

Solução:
A senha de acesso é o $S(x)$, logo, $S(x) = 8428 \Rightarrow 2020 + 4x = 8428 \Rightarrow x = 1602$.
Então, a data de aniversário é 16/02.

O tempo que se passa diante de monitores, ficando exposto ao brilho dessas telas, é um problema enfrentado por muitas pessoas, como os editores de vídeo, por exemplo.

Diante disso, um programador desenvolveu um aplicativo que realiza ajustes do brilho da imagem em função do tempo de edição em minutos. Este aplicativo utiliza a função quadrática $b(t) = -0{,}02t^2 + 1{,}6t + 63$, em que b é o brilho, em porcentagem, e t é o tempo, em minutos, que o programador passa editando vídeos. Esse aplicativo funciona para $t \in [0; 100]$ e, após passado esse tempo, o aplicativo automaticamente reinicia.

Com base nessas informações, pode-se afirmar que o percentual de brilho do monitor após o programador editar vídeos por uma hora e quinze minutos será:

70,5%
65%
55,5%
54,5%
35%

Gabarito: 70,5%

Solução:
Convertendo o tempo para minutos: $t = 1\text{ h }15\text{ min} = 75\text{ min}$.
Então, o brilho será: $b(75) = -0{,}02 \times 75^2 + 1{,}6 \times 75 + 63 = -112{,}5 + 120 + 63 = 70{,}5$.
Como b já é dado em percentual, o brilho será de 70,5%.

A interação nas relações humanas ocorre desde a origem da humanidade. As pessoas sempre foram motivadas pelas relações com o próximo. Com o advento dos computadores, essa interação se intensificou e, atualmente, com a internet e as diversas redes de relacionamento, novas formas de interação e de relacionamento interpessoais surgiram e, possivelmente, novas surgirão. Nessas redes de relacionamento, uma notícia atinge um público muito maior e muito mais rapidamente do que poderia atingir quando esses relacionamentos não eram informatizados.

Suponha que uma notícia seja comunicada a um grupo de 100 pessoas em uma rede social numa primeira interação. Em seguida, na segunda interação, cada uma dessas 100 pessoas repassa a notícia para outras duas. Já na terceira interação, cada uma das 200 pessoas que souberam da notícia na segunda interação, repassa para mais duas novas pessoas. O processo se repete de forma sucessiva, ou seja, na interação n apenas as pessoas da interação $n-1$ repassam, cada uma, para duas novas pessoas.

Considerando que nunca há interseção entre as pessoas que recebem a notícia, a quantidade de pessoas que receberão a notícia na 11^{a} interação corresponde a:

a) 200 pessoas
b) 1.100 pessoas
c) 2.200 pessoas
d) 102.400 pessoas
e) 204.800 pessoas

Gabarito: 102.400 pessoas

Solução:
Seja a_n o número de pessoas que recebem a notícia na interação n.
Pelo enunciado: $a_n = 2a_{n-1}$ e $a_1 = 100$.
A sequência é uma PG de razão de razão 2. Pela fórmula do termo geral:
$a_n = q^{n-1}a_1 \Rightarrow a_{11} = 2^{10} \times 100 = 102.400$.

Uma empresa de desenvolvimento de aplicativos *mobile* realizou uma pesquisa *survey* com o intuito de observar os tipos de aplicativos mais recorrentes nos celulares domésticos. Dessa forma, a partir dos dados coletados, foram obtidas as seguintes informações:

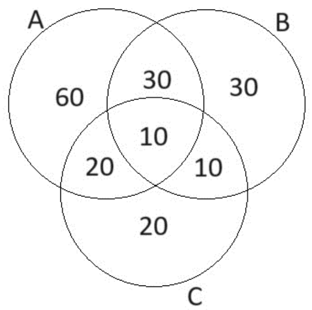
• 120 participantes utilizam aplicativos de redes sociais;
• 80 participantes utilizam aplicativos de jogos;
• 60 participantes utilizam aplicativos de produção profissional;
• 40 participantes utilizam aplicativos tanto de redes sociais quanto de jogos;
• 30 participantes utilizam aplicativos tanto de redes sociais quanto de produção profissional;
• 20 participantes utilizam aplicativos tanto de jogos quanto de produção profissional;
• 10 participantes utilizam os três tipos de aplicativos.

Com base nas respostas apresentadas, pode-se afirmar que o número de participantes que utilizou apenas um tipo de aplicativo corresponde a:

110
160
180
240
360

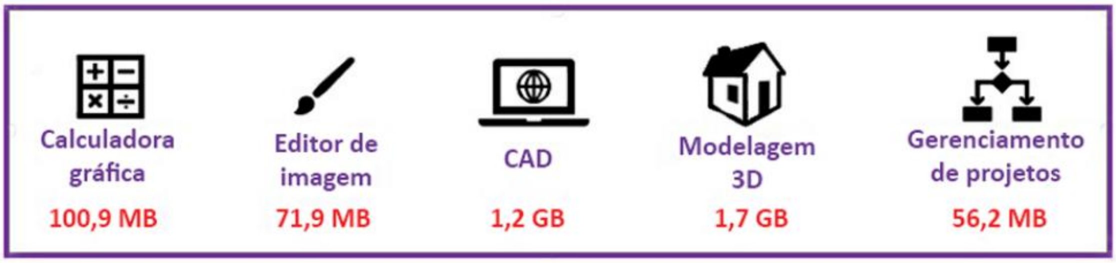
Gabarito: 110

Solução:
Seja A o conjunto das pessoas que utilizam aplicativos de redes sociais, B conjunto das pessoas que utilizam aplicativo de jogos e C conjunto das pessoas que utilizam aplicativos para produção profissional
O Diagrama de Venn abaixo representa todas as informações do problema:



Logo, o número de pessoas que utilizam apenas um dos aplicativos é: $60 + 30 + 20 = 110$.

Muitos *softwares* utilizados nos computadores por engenheiros e arquitetos já ganharam suas versões para *smartphones*, chamados então de aplicativos. Considere estes aplicativos instalados em um *smartphone* e seus respectivos tamanhos:



Sabendo-se que $1\ \mathrm{GB} = 2^{10}\ \mathrm{MB}$, pode-se afirmar que o tamanho médio desses aplicativos corresponde a:

$46{,}38\ \mathrm{MB}$
$57{,}40\ \mathrm{MB}$
$231{,}90\ \mathrm{MB}$
$407{,}82\ \mathrm{MB}$
$639{,}72\ \mathrm{MB}$

Gabarito: $\mathbf{639,72\ MB}$

Solução:
Convertendo de unidade os arquivos que estão com seus tamanhos em GB:

- CAD: $1{,}2\ \mathrm{GB} = 1{,}2 \times 2^{10}\ \mathrm{MB} = 1228{,}8\ \mathrm{MB}$
- Modelagem 3D: $1{,}7\ \mathrm{GB} = 1{,}7 \times 2^{10}\ \mathrm{MB} = 1740{,}8\ \mathrm{MB}$

Assim, o tamanho médio será:

$$\bar{x} = \frac{100{,}9 + 71{,}9 + 1128{,}8 + 1740{,}8 + 56{,}2}{5} = 639{,}72\ \mathrm{MB}$$

Para liberar espaço em seu *smartphone*, um usuário decide contratar um serviço de armazenamento em nuvem. O serviço a ser contratado deverá comportar 16.384 fotos e 2.048 vídeos, considerando que cada foto possui um tamanho médio de $4\ \mathrm{MB}$ e cada vídeo possui um tamanho médio de $16\ \mathrm{MB}$. Sabendo-se que $1\ \mathrm{GB} = 2^{10}\ \mathrm{MB}$, o serviço de armazenamento em nuvem contratado deverá ter, pelo menos:

$18\ \mathrm{GB}$
$42\ \mathrm{GB}$
$96\ \mathrm{GB}$
$128\ \mathrm{GB}$
$264\ \mathrm{GB}$

Gabarito: $96\ \mathrm{GB}$

Solução:
Para facilitar as contas, note que o número de fotos e vídeos é uma potência de 2:

- Fotos: $16.384 = 2^{14} \Rightarrow$ Tamanho: $2^{14} \times 2^{2} = 2^{16}\ \mathrm{MB}$
- Vídeos: $2.048 = 2^{11} \Rightarrow$ Tamanho: $2^{11} \times 2^{4} = 2^{15}\ \mathrm{MB}$

Somando:

$$(2^{16} + 2^{15})\ \mathrm{MB} = \left(\frac{2^{16} + 2^{15}}{2^{10}}\right) \mathrm{GB} = (2^{6} + 2^{5})\ \mathrm{GB} = 96\ \mathrm{GB}$$

Suponha que você esteja gerenciando uma equipe de desenvolvedores de *software* em uma empresa de tecnologia. Você precisa decidir quantos desenvolvedores júniores e quantos desenvolvedores sêniores contratar para um novo projeto. A empresa tem dois tipos de tarefas: codificação de *software* e teste de qualidade.

Cada desenvolvedor júnior pode, em uma hora, desenvolver 3 linhas de código e ainda realizar 2 testes de qualidade. Cada desenvolvedor sênior pode, em uma hora, desenvolver 5 linhas de código e ainda realizar 3 testes de qualidade.

O número de horas no contrato de um desenvolvedor júnior ou sênior é igual, ou seja, a única diferença está na produtividade.

O projeto requer 1.900 linhas de codificação de *software* e 1.200 testes de qualidade. Sabendo que a empresa irá contratar exatamente 20 funcionários, contando júniores e sêniores, a carga horária total de trabalho, em horas, de cada funcionário será:

600
500
100
30
25

Gabarito: 25

Solução:
Seja t o número de horas que cada funcionário trabalha, j o número de desenvolvedores júniores e s o número de desenvolvedores sêniores. Do enunciado:

$$\begin{cases} 3tj + 5ts = 1900 \ \ (*) \\ 2tj + 3ts = 1200 \ \ (**) \end{cases}$$

Eliminando o termo ts, $5 \cdot (**) - 3 \cdot (*)$: $tj = 300$. Substituindo em $(*)$:

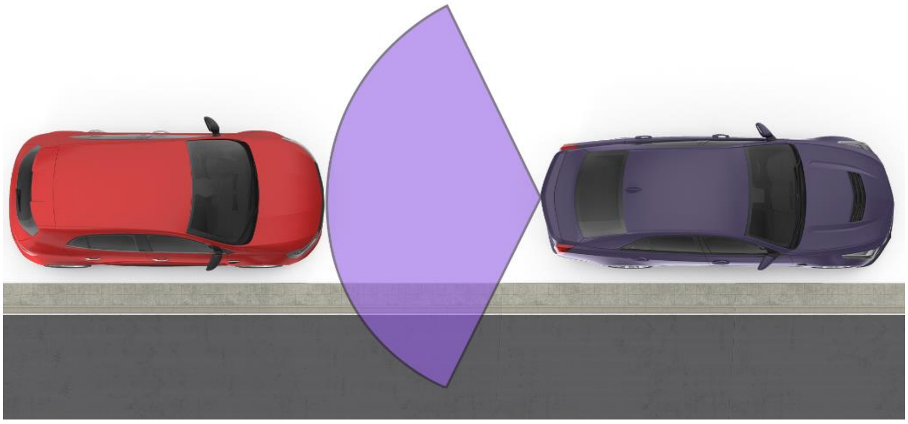
$$900 + 5ts = 1900 \Rightarrow ts = 200$$

Somando os dois valores obtidos e usando que o total de funcionários é 20:

$$tj + ts = 500 \Rightarrow t(j + s) = 500 \Rightarrow t \times 20 = 500 \Rightarrow t = 25$$

Enquanto os carros autônomos não chegam às lojas, os fabricantes investem em soluções tecnológicas que facilitam a condução, como o sistema avançado de assistência à direção (ADAS), que possui como uma de suas finalidades o *Active Park Assist* ou assistente de estacionamento. Para que essa tecnologia funcione, são necessários sensores e câmeras nos veículos que auxiliarão o computador de bordo a analisar o espaço e a verificar obstáculos ao redor.

Com base nessas informações, considere que o sensor traseiro de um veículo, ao estacionar utilizando o *Active Park Assist*, identificou outro veículo estacionado, como é apresentado por meio desta figura:



Sabendo-se que o setor circular, indicando o campo de detecção do sensor traseiro, possui uma área de $1{,}125\pi\ \mathrm{m}^2$ e ângulo central de $125°$, pode-se afirmar que a distância que separa os dois veículos, considerando-se que estão alinhados, é de:

$1{,}061\ \mathrm{m}$
$1{,}125\ \mathrm{m}$
$1{,}620\ \mathrm{m}$
$1{,}800\ \mathrm{m}$
$3{,}240\ \mathrm{m}$

Gabarito: $\mathbf{1,800\ m}$

Solução:

Área do setor circular: $A = \pi r^2 \frac{\alpha}{360^o} = 1{,}125\pi \Longrightarrow r^2 \cdot \frac{125^o}{360^o} = 1{,}125 \Rightarrow$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{360^o}{125^o} \cdot \frac{1125}{1000} = \frac{72}{25} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{25} \Rightarrow r = \frac{9}{5} = 1{,}800\ \mathrm{m}$$

Um dos mecanismos de liberação de espaço de armazenamento em um celular é a busca por arquivos duplicados. Uma vez encontrado um arquivo duplicado, ele pode ser excluído para que todo o espaço que ele ocupa seja liberado.

Esse processo pode ser demorado porque o *software* deve comparar cada arquivo com todos os outros do computador, verificando-se, assim, todos os pares de arquivos possíveis. Ademais, cada par de arquivos só precisa ser verificado uma única vez.

Diante disso, considere que cada operação de comparação entre dois arquivos demanda $0{,}001$ segundo. O tempo necessário para verificar todos os arquivos de um celular com 4.000 arquivos é de aproximadamente:

4 s
8 s
133 min
266 min
400 min

Gabarito: $\mathbf{133\ min}$

Solução:
Para formar todos os pares de arquivos possíveis uma única vez podemos utilizar combinação simples

$$C_{4000,2} = \frac{4000!}{3998! \cdot 2!} = \frac{4000 \times 3999}{2} = 7.998.000$$

Cada par demora 0,001 s, assim o tempo necessário será:
$7.998.000 \times 0{,}001 = 7998\text{ s} = \frac{7998}{60}\text{ min} = 133{,}3\text{ min}$

Em um projeto relacionado à análise de performance de um *web server*, decidiu-se analisar arquivos de registro para investigar solicitações de acesso que falharam. Dessa forma, foi possível verificar a ocorrência de falhas pelos seguintes erros:

• 404 – *Not found errors*;
• 403 – *Forbidden errors*;
• 500 – *Internal server errors*.

Um dos arquivos analisados apresentou 150.400 registros de acesso, dos quais 30% falharam. Desse percentual, 20% se referiram ao erro 404; 65% eram direcionados ao erro 403; e o restante, ao Erro 500.

Para verificar os impactos do servidor, esse resultado foi confrontado com um registro anterior, que havia apresentado 85.600 registros de acesso, dos quais 5.136 se referiram ao Erro 500. Portanto, pode-se afirmar que, entre os dois arquivos de registro analisados, a diferença entre os percentuais de falhas ocasionadas pelo Erro 500 corresponde a:

$1,5\%$
6%
9%
12%
24%

Gabarito: $\mathbf{1,5}\%$

Solução:
No primeiro arquivo de registro, 30% dos acessos falharam. Se desse percentual, 20% foram de erro 404 e 65% de erro 403, então $100\% - 20\% - 65\% = 15\%$ foram de erro 500, assim, o percentual de erro 500 é $15\% \cdot 30\% = 4,5\%$.

No segundo arquivo, o percentual de erro 500 pode ser calculado pela razão: $\frac{5.136}{85.600} = 6\%$.

Assim, a diferença entre os percentuais é $6\% - 4,5\% = 1,5\%$.

Um sistema de inteligência artificial começa seu aprendizado sem saber quase nada e precisa analisar vários acontecimentos em busca de relações de causa e consequência. Diante disso, considere que uma IA, ao analisar vídeos, tenta entender quedas e que, inicialmente, não entende que existe uma força gravitacional atuando.

Essa IA analisará um conjunto de situações em que existe um "antes" e um "depois" em busca de analisar esta proposição:

SE "corpo está no ar", ENTÃO "corpo cai".

Neste quadro, a análise de vídeo está parcialmente concluída nas situações de I até IV:

Situação	Corpo está no ar	Corpo cai
I	VERDADEIRO	(vídeo não analisado)
II	FALSO	(vídeo não analisado)
III	(vídeo não analisado)	VERDADEIRO
IV	(vídeo não analisado)	FALSO

Para avaliar se a proposição é verdadeira, é necessário concluir a análise de vídeo:

da situação I.
das situações I ou III.
das situações I ou IV.
das situações II ou IV.
de todas as situações.

Gabarito: das situações I ou IV

O conectivo se *p*, então *q* obedece a seguinte tabela verdade:

p	q	p --> q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Repare que uma implicação desse tipo só é falsa quando *p* é verdadeira, porém *q* não.

Na situação I *p* é verdadeira (linhas 1 e 2 da tabela). Repare que nesse caso não temos como saber se a sentença é verdadeira, isso depende essencialmente da proposição *q*.

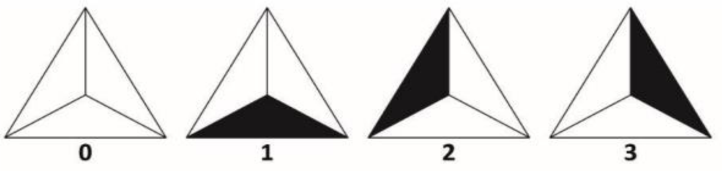
Na situação IV *q* é falsa (linhas 2 e 4 tabela). Repare que nesse caso não temos como saber se a sentença é verdadeira, isso depende essencialmente da proposição *p*.

Na situação II *p* é falsa (linhas 3 e 4 da tabela). Repare que nesses casos a sentença sempre é verdadeira, não sendo necessária nenhuma conclusão sobre *q*.

Na situação III *q* é verdadeira (linhas 1 e 3 da tabela). Repare que nesses casos a sentença sempre é verdadeira, não sendo necessária nenhuma conclusão sobre *p*.

Como forma de manter o sigilo na troca de documentos de forma online entre a matriz de uma empresa e suas filiais, foi criado um código, reconhecido somente entre os usuários autorizados nessa tarefa.

Esse código foi elaborado usando formas triangulares de tal maneira que cada uma representa os algarismos da base 4, seguindo o esquema a seguir:



Sempre que um arquivo precisa ser aberto, o sistema gera uma nova sequência com algumas dessas formas triangulares formando um número na base 4. O usuário, então, deve digitar seu valor correspondente na base 16 para poder abri-lo.

Ao executar a tarefa de abrir um novo arquivo, um usuário recebeu o seguinte código para decifrar:

Nesse caso, o número que o usuário deveria digitar para ter acesso ao arquivo é o:

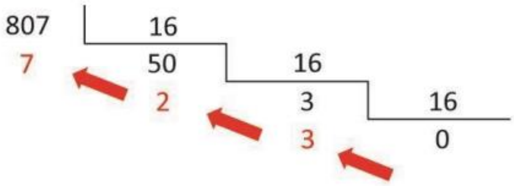
15
61
327
363
807

Gabarito: $\mathbf{327}$

Solução:
A figura representa a sequência 30213, lembrando que esta sequência está na base 4.

Passando para a base 10, através da própria definição de bases de numeração:
$(30213)_4 = 3 \cdot 4^4 + 0 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 807$

Agora passando para a base 16, utilizando divisões sucessivas:



ou seja, $807 = (327)_{16}$

Um jogo em Realidade Aumentada (RA), denominado “PARCEIROS”, simula dois avatares que fazem o papel de “parceiros” do jogador e o acompanham em um mapa real da região onde esse personagem se encontra. O jogador, com o uso de um celular ou tablet, ao abrir o jogo, tem o mapa da região que apresenta estes dois “parceiros” em algum local próximo.

Considere que a posição do jogador em um mapa com divisões em metros e cuja posição por coordenadas cartesianas seja $(8, 26)$ e que as posições de seus “parceiros” em certo momento sejam $(k, -10)$ e $(10, k)$, com k variando no conjunto dos números reais.

Existem dois momentos em que o jogador e os avatares estarão alinhados. Determine o valor de k onde esse alinhamento ocorrerá, considerando que o jogador e o avatar do 1º quadrante estarão o mais próximo possível.

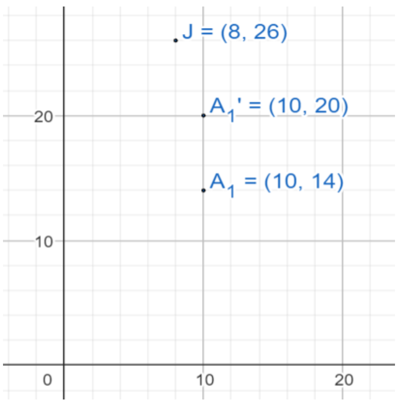
14
20
25
30
50

Gabarito: 14

Solução:
Para que os três pontos estejam alinhados:

$$\begin{vmatrix} 8 & 26 & 1 \\ k & -10 & 1 \\ 10 & k & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -80 + 260 + k^2 + 100 - 8k - 26k = 0 \Rightarrow k^2 - 34k + 280 = 0$$

$$\Rightarrow k = 14 \text{ ou } k = 20$$



O avatar do 1º quadrante pode estar em $(10, 14)$ ou $(10, 20)$. Considerando estes dois pontos, o mais próximo do jogador de coordenadas $(8, 26)$ será o $(10, 20)$, ou seja, $k = 20$.

Por meio da nanotecnologia, engenheiros americanos desenvolveram uma esponja capaz de remover metais pesados de água contaminada, tornando-a potável, o que é um dos maiores desafios de saúde pública mundial. Essa tecnologia é capaz de capturar também metais valiosos, como ouro e cobalto, fundamentais para as baterias de íon-lítio usadas nos carros elétricos.

Uma esponja de 100 gramas revestida com nanopartículas consegue limpar um volume de 700 galões de água. Sabendo-se que um galão, $1\ \mathrm{gal}$, de água equivale a $3{,}785$ litros de água, pode-se afirmar que, com uma esponja de $2\ \mathrm{kg}$ revestida com nanopartículas, é possível limpar:

$5{,}299 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}^3$ de água contaminada
$5{,}299 \times 10^{-1}\ \mathrm{m}^3$ de água contaminada
$5{,}299 \times 10^{1}\ \mathrm{m}^3$ de água contaminada
$5{,}299 \times 10^{4}\ \mathrm{m}^3$ de água contaminada
$5{,}299 \times 10^{7}\ \mathrm{m}^3$ de água contaminada

Gabarito: $\mathbf{5,299 \times 10^{1}\ m^3}$ de água contaminada

Solução:
Se uma esponja de $100\ \mathrm{g}$ consegue limpar $700\ \mathrm{gal}$, então uma esponja de $2\ \mathrm{kg} = 2000\ \mathrm{g}$ conseguiria limpar $20 \times 700 = 14.000\ \mathrm{gal}$.

Cada galão equivale a $3{,}785\ \mathrm{l}$, assim conseguiríamos limpar
$3{,}785 \times 14.000 = 52.990\ \mathrm{l} = 52.990\ \mathrm{dm}^3 = 52{,}99\ \mathrm{m}^3 = 5{,}299 \times 10^{1}\ \mathrm{m}^3$

Para guardar seus ativos digitais numa carteira digital, um usuário optou por fazer a segurança com palavras-chave. Esse tipo de segurança consistia em 20 palavras distintas que deveriam ser digitadas em determinada ordem para ter acesso ao conteúdo da carteira.

Dessa forma, esse usuário anotou as 20 palavras arbitrariamente em um papel, fotografou-o e guardou essa foto em seu e-mail. Entretanto, por segurança, ele mudou a ordem das palavras ao colocá-las no papel.

Com base nessas informações, suponha que uma quadrilha de cibercriminosos consiga acesso à fotografia do usuário e que seja capaz de inserir cada ordem na carteira em 1 segundo. Diante disso, pode-se afirmar que a quadrilha conseguirá acessar a carteira após inserir:

$20!$ ordens distintas, o que é inviável de ser feito em um mês.
$20!$ ordens distintas, o que é viável de ser feito em um mês.
400 ordens distintas, o que é viável de ser feito em um mês.
2020 ordens distintas, o que é inviável de ser feito em um mês.
2020 ordens distintas, o que é viável de ser feito em um mês.

Gabarito: $20!$ ordens distintas, o que é inviável de ser feito em um mês

Solução:
Ele deve testar todas as 20! permutações.

Estimando o a ordem de grandeza:
$20! = 20 \times 19 \times \ldots \times 10 \times 9! > 10^{11} \times 9! = 362.880 \times 10^{11} \cong 3600 \times 10^{13}\ s = 10^{13}\ \mathrm{h}$

tempo muito superior a um mês: $24 \times 30 = 720\ \mathrm{h}$

Um data center está enfrentando problemas de consumo energético, uma vez que seus servidores demandam, todos juntos, $2.000\ \mathrm{kW}$ de energia por hora, tendo todos o mesmo consumo para se manterem em funcionamento. Diante disso, a empresa decidiu substituir 30% dos servidores antigos por um novo modelo mais eficiente e com consumo de 25% a menos de energia do que os anteriores. Após essa substituição, a empresa implantou um novo sistema de resfriamento que reduz o consumo energético total em 20%.

Com base nas informações apresentadas, pode-se afirmar que a demanda energética, por hora, reduziu para:

$840\ \mathrm{kW}$
$1.450\ \mathrm{kW}$
$1.480\ \mathrm{kW}$
$1.850\ \mathrm{kW}$
$1.970\ \mathrm{kW}$

Gabarito: $\mathbf{1.480\ kW}$

Solução:
Em 30% dos servidores o consumo reduziu 25%, então a redução foi de: $25\% \cdot 30\% = 7{,}5\%$.

Sobrando: $100\% - 7{,}5\% \cdot 2000 = 0{,}925 \cdot 2.000\ kW = 1.850\ kW$

Após a substituição ainda foi implementado um sistema que reduziu o consumo em 20% (sobrando 80%): $0{,}8 \times 1.850 = 1.480\ \mathrm{kW}$.

Um conjunto de cartas é confeccionado de maneira que cada carta sempre possua uma letra em um dos lados e um número no outro.

É apresentada para uma inteligência artificial (AI) a seguinte sequência de cartas com os lados virados aleatoriamente:

1ª carta	2ª carta	3ª carta	4ª carta	5ª carta	6ª carta	7ª carta
A	3	6	15	J	B	4

Além disso, é feito o seguinte pedido para a AI: "Virando o mínimo de cartas possível, quais cartas devem ser viradas para verificar se é válida a regra: atrás de cada número ímpar existe sempre uma vogal?"

Se a AI respondeu corretamente, ela listou as cartas:

3 e 15
3, 6, 15 e 4
A, 3, e 15
3, 15, J e B
todas

Gabarito: 3, 15, J e B

Solução:
Cada carta tem letra de um lado e número de outro e a única regra a ser verificada é se atrás de cada ímpar existe uma vogal.

Então, é necessário verificar todos os números ímpares, para ver se realmente existirá vogal do outro lado. Nada é afirmado sobre o que existe atrás de um número par.

Não é necessário verificar as cartas com vogais: se tiver um número par o que queremos verificar continua sendo verdade, e se tiver um número ímpar também.

Entretanto, também é necessário virar todas as consoantes, porque não pode haver um número ímpar do outro lado.

Assim, será necessário verificar as cartas 3, 15, J, B.

Observação: A necessidade de virar as consoantes, não as vogais, pode ser percebida quando analisamos a equivalência das seguintes sentenças: $p \rightarrow q$; $\sim q \rightarrow \sim p$

p	q	p q	~q	~p	~q → ~p
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Dois amigos combinaram de compartilhar uma senha composta por 3 letras do alfabeto. Essa senha será enviada de um para o outro após ser criptografada da seguinte forma: cada letra da senha será criptografada com o código hexadecimal, composto de dois dígitos, o qual representará a posição dessa letra no alfabeto.

O quadro a seguir apresenta as primeiras letras do alfabeto e suas associações com o sistema hexadecimal:

Letra do alfabeto	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	...
Posição da letra	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
Código hexadecimal	01	02	03	04	05	06	07	08	09	0A	0B	...

Assim, o código $06\ 0D\ 14$ representa a senha FMT, pois:

$$(06)_{16} = 0 \cdot 16^1 + 6 \cdot 16^0 = 0 + 6 = 6 \rightarrow F$$

$$(0D)_{16} = 0 \cdot 16^1 + 13 \cdot 16^0 = 0 + 13 = 13 \rightarrow M$$

$$(14)_{16} = 1 \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0 = 16 + 4 = 20 \rightarrow T$$

Um dos amigos enviou o seguinte código $13\ 0A\ 16$. Porém, o outro amigo não conseguiu identificar nem o segundo, nem o terceiro caractere do código. Ou seja, ele leu $1\_\_\ \ \_\_A\ \ 16$. Qual a senha correta e quantas tentativas no máximo serão necessárias para que ele descubra tal senha?

SJV sendo necessárias no máximo 16 tentativas.
SJV sendo necessárias no máximo 22 tentativas.
SJV sendo necessárias no máximo 32 tentativas.
MJV sendo necessárias no máximo 11 tentativas.
MJV sendo necessárias no máximo 22 tentativas.

Gabarito: SJV sendo necessárias no máximo 22 tentativas.

Solução:
Passando os números para a base 10:

$$(13)_{16} = 1 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 = 19 \rightarrow S$$

$$(0A)_{16} = 0 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^0 = 10 \rightarrow J$$

$$(16)_{16} = 1 \cdot 16^1 + 6 \cdot 16^0 = 22 \rightarrow V$$

Para determinar o número de tentativas até se descobrir a senha, repare que existe 15 números começando com 0, de fato, temos de 01 até 0F. Como são 26 letras no alfabeto, teremos 11 números começando com 1.

Já com o segundo dígito sendo A, existem apenas as opções 0A e 1A. Logo, temos $11 \times 2 = 22$ tentativas a serem feitas.

Cidades inteligentes são totalmente providas de tecnologias com a finalidade de melhorar a eficiência no consumo de energia e propiciar melhor qualidade de vida aos cidadãos.

Por meio de um projeto ambicioso, pretende-se construir três dessas cidades, uma próxima a outra. Considere que em um mapa cartográfico, com distâncias dadas em quilômetros, as posições dessas futuras cidades foram indicadas pelas coordenadas $A(m, 13)$, $B(6, 11)$ e $C(24, m)$.

Para que os pontos indicados estejam alinhados e a distância entre A e C seja de $11\sqrt{5}$ quilômetros, o valor de m precisa ser igual a:

1 km
2 km
12 km
15 km
35 km

Gabarito: 2 km

Solução:
Para que os três pontos estejam alinhados:

$$\begin{vmatrix} m & 13 & 1 \\ 6 & 11 & 1 \\ 24 & m & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 11m + 312 + 6m - 264 - m^2 - 78 = 0 \Rightarrow m^2 - 17k + 30 = 0$$

$$\Rightarrow m = 2 \text{ ou } m = 15$$

Usando a distância entre os pontos A e C:

$$d(A, C) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(m - 24)^2 + (13 - m)^2} = 11\sqrt{5}$$

$$m^2 - 48m + 576 + 169 - 26m + m^2 = 605 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 74m + 140 = 0 \Rightarrow m^2 - 37m + 70 = 0 \Rightarrow m = 35 \text{ ou } m = 2.$$

Como ambas as condições devem ser satisfeitas, então $m = 2$.

Nós vivemos na era em que os sonhos de colonizar Marte começam a sair do papel.

"*Serão necessários* 1.000 *espaçonaves e um milhão de toneladas de vitamina C para fazer a vida em Marte sustentáve"l, diz o CEO da SpaceX Elon Musk. ... "Nós precisamos ter uma cidade autossustentável lá*."

Disponível em: https://www.cnbc.com/2020/03/09/spacex-plans-how-elon-musk-see-life-on-mars.html.
Acesso em: 15 jul. 2023.

Os números de Musk para a colonização de Marte surpreendem pois indicam que serão necessários 1.000.000 de seres humanos para a colonização ser realmente bem-sucedida.

Considere que a probabilidade de uma colônia em Marte ter sucesso seja diretamente proporcional à raiz quadrada do número x de seres humanos da colônia, para valores de x variando de 0 a 1 milhão. E, adicionalmente, considere que, para $x = 1.000.000$, essa probabilidade seja exatamente 100%.

Sendo assim, para que a colônia tenha 25% de probabilidade de sucesso, são necessárias:

25.000 pessoas
62.500 pessoas
250.000 pessoas
500.000 pessoas
625.000 pessoas

Gabarito: 62.500 pessoas

Solução:
Se a probabilidade de sucesso é diretamente proporcional a raiz da população, então $P = k\sqrt{x}$, onde P é a probabilidade, x o tamanho da população e k a constante de proporcionalidade.

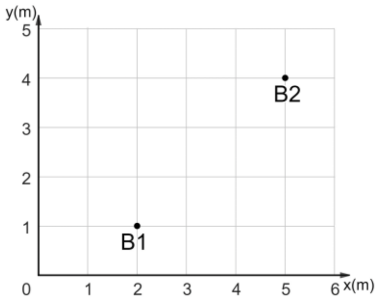
Com 1.000.000 a probabilidade é 100%, ou seja,

$$1 = k\sqrt{10^6} \Rightarrow k = \frac{1}{1.000}$$

Para a probabilidade ser 25%

$$0{,}25 = \frac{1}{1.000}\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = 250 \Rightarrow x = 62.500$$

Uma empresa foi contratada para agilizar a entrada de moradores em um condomínio residencial. Diante disso, foi instalado um sistema de controle de acesso por meio de dois equipamentos de biometria facial, os quais estão localizados no portão de entrada de pedestres, representado pelo ponto B1, e no portão de entrada de carros, representado por B2, cujas coordenadas estão indicadas na imagem:



Para aumentar ainda mais a segurança, um equipamento de biometria digital será instalado no condomínio de maneira a ficar equidistante dos dois equipamentos de biometria facial. A relação entre as coordenadas x e y, as quais representam a posição onde o equipamento de biometria digital poderá ser instalado, pode ser representado por:

$y = -x - 6$

$y = x - 1$

$y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

$y = \frac{5}{2}$

$y = 6 - x$

Gabarito: $\boldsymbol{y = 6 - x}$

Solução:
Como a biometria digital é equidistante dos dois pontos dados ela deve pertencer à mediatriz.
A mediatriz é a reta perpendicular que passa pelo ponto médio.

Cálculo do ponto médio: $M_{B1B2} = \frac{B1+B2}{2} = \frac{(2,1)+(5,4)}{2} = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$

Cálculo dos coeficientes angulares: $m_{B1B2} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-1}{5-2} = 1$

Como a mediatriz é perpendicular e para retas perpendiculares (não alinhadas aos eixos) $m_1 m_2 = -1$, então, $m_{\perp B1B2} = -1$

Com o coeficiente angular e um ponto da reta, têm-se:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - \frac{5}{2} = -1\left(x - \frac{7}{2}\right) \Rightarrow 2y - 5 = -2x + 7 \Rightarrow y = 6 - x$$

Uma empresa de *streaming* de música deseja entender melhor a relação entre a duração das músicas e o número de vezes que elas são reproduzidas.

A empresa coletou dados de várias músicas populares e registrou o tempo de duração de cada música em minutos e o número de vezes que cada música foi reproduzida por diferentes usuários.

Aqui estão os dados amostrais:
- Duração das Músicas (em minutos): $(3, 4, 2, 5, 6)$
- Número de Reproduções: $(100, 120, 80, 150, 200)$

Agora, eles querem calcular a covariância entre a duração das músicas e o número de reproduções para avaliar como essas duas variáveis estão relacionadas. Sabe-se que a covariância é obtida pela média dos produtos dos desvios das amostras, ou seja,

$$cov(X, Y) = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n}$$

onde $\bar{X}$ é a média de uma amostra, neste caso, média da duração das músicas, e $\bar{Y}$ a média da outra amostra, neste caso, média do número de reproduções.

Na fórmula, $X_i - \bar{X}$ é a diferença entre o tempo de duração da música i e a média de duração de todas as músicas, $Y_i - \bar{Y}$ é a diferença entre o número de reproduções da música i e a média do número de reproduções de todas as músicas. Assim, calcula-se essas diferenças para as cinco músicas, multiplica-se os respectivos valores e determina-se a média desses cinco produtos.

Uma correlação positiva indica que as grandezas variam no mesmo sentido, ou seja, a tendência é que quando um valor aumente (ou diminua) o outro também aumente (ou diminua). Já uma correlação negativa indica que as grandezas variam em sentidos opostos.

No caso desta empresa, a covariância calculada foi igual a:

30
58
5
-3
-10

Gabarito: 58

Solução
Calcular as médias: $\bar{X} = \frac{3+4+2+5+6}{5} = 4$ e $\bar{Y} = \frac{100+120+80+150+200}{5} = 130$

Os desvios são as diferenças entre os dados da amostra e sua respectiva média.

$$(Xi - X) \rightarrow (3 - 4, 4 - 4, 2 - 4, 5 - 4, 6 - 4) = (-1, 0, -2, 1, 2)$$

$$(Yi - Y) \rightarrow (100 - 130, 120 - 130, 80 - 130, 150 - 130, 200 - 130) = (-30, -10, -50, 20, 70)$$

Produto: $(Xi - X)(Yi - Y) \rightarrow (30, 0, 100, 20, 140)$

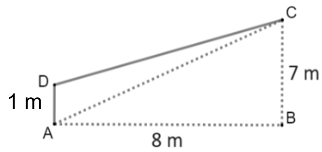
A covariância é a média desses valores: $Cov(X, Y) = \frac{30+0+100+20+140}{5} = 58.$

No hall de entrada do Inteli, Instituto de Tecnologia e Liderança, encontra-se um dos pontos mais procurados pelos visitantes para tirar fotos ou gravarem vídeos para suas mídias sociais.

Como pode ser visto na foto, esta entrada consiste em dois lances de escadas e uma arquibancada, local onde os alunos podem acompanhar de um telão tudo que está acontecendo dentro do auditório.

Uma criança de $1\ \mathrm{m}$ encontra-se ao pé da escada, e deseja ouvir o som que sai da base do totem instalado ao final do primeiro lance de escadas. Esse lance de escadas tem $7\ \mathrm{m}$ de altura e $8\ \mathrm{m}$ de profundidade.

A seguinte figura geométrica descreve a situação

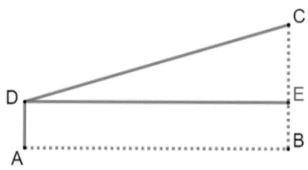


Esta é uma vista lateral onde o triângulo ABC representa o primeiro lance de escadas. O segmento $AD = 1\ \mathrm{m}$ representa a criança ao pé da escada, e C é o ponto de onde parte o som do totem.

Qual o tempo, aproximadamente, que o som emitido pelo totem leva para chegar até à criança, em milissegundos, sabendo que o som se propaga em linha reta com velocidade de $343\ \mathrm{m/s}$?

24
29
37
81
200

Gabarito: 29
Solução:
Seja E o pé da perpendicular traçada por D.
$ED = AB = 8\ \mathrm{m}$ e $EC = CB - EB = 7 - 1 = 6\ \mathrm{m}$, portando o triângulo ECD é pitagórico e $CD = 10\ \mathrm{m}$.
A velocidade média é a razão entre deslocamento e tempo:
$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10}{343} \cong 0{,}029\ \mathrm{s} = 29\ \mathrm{ms}.$



Para verificar os custos de novas tecnologias inseridas em seus carros elétricos, uma montadora fez um levantamento dos custos unitários, em reais, de tela LED, de alto-falantes e de sensor de estacionamento, indicados, respectivamente, em cada linha da matriz A abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 550 \\ 225 \\ 180 \end{bmatrix}$$

A matriz B fornece a quantidade de telas LED, a de alto-falantes e a de sensores de estacionamento utilizados na fabricação de cada modelo – entrada, intermediário e completo – indicadas em cada linha e nessa ordem. Mas veja que a quantidade de sensores de estacionamento para o modelo completo, representada por x, ainda não está definida.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \\ 5 & 7 & x \end{bmatrix}$$

O gasto total com telas LED, alto-falantes e sensores de estacionamento para a fabricação de 500 veículos do modelo de entrada, 800 veículos do modelo intermediário e 1.000 veículos do modelo completo não pode passar de R$ 9.450.000,00. Nessa situação, o maior valor para x deve ser:

6
7
8
9
10

Gabarito: 8

Solução:
O produto das duas matrizes resulta no custo de cada modelo por linha

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \\ 5 & 7 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 550 \\ 225 \\ 180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 550 + 3 \times 225 + 5 \times 180 \\ 2 \times 550 + 5 \times 225 + 5 \times 180 \\ 5 \times 550 + 7 \times 225 + x \times 180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2125 \\ 3125 \\ 4325 + 180x \end{bmatrix}$$

O produto dessa matriz pelo vetor linha que representa a quantidade de cada modelo resulta no custo total da empresa

$$\begin{bmatrix} 500 & 800 & 1000 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2125 \\ 3125 \\ 4325 + 180x \end{bmatrix} =$$

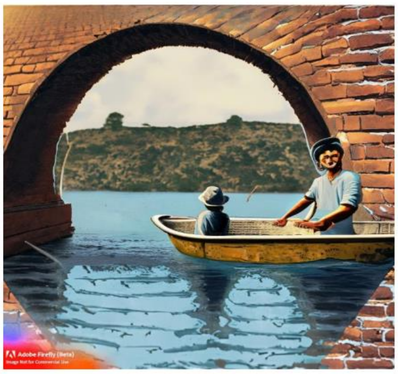
$$= [500 \times 2125 + 800 \times 3125 + 1000 \times (4325 + 180x)] =$$

$$= [7.887.500 + 180.000x]$$

Assim, x satisfaz a seguinte inequação: $7.887.500 + 180.000x \leq 9.450.000 \Longrightarrow x \leq 8{,}6806$.
Como x é inteiro, $x_{MÁX} = 8$.

Os novos recursos de Inteligência Artificial (IA) recém-adicionados em *softwares* de edição de imagens, como Adobe *Firefly* e *Photoshop*, podem utilizar modelagens matemáticas para completar ambientes e seções que naturalmente foram cortadas da foto.

No cenário abaixo, considere que um usuário decidiu solicitar à IA que removesse o pescador da imagem, o que implicaria em completar parte da ponte:



Após a solicitação, a Inteligência Artificial estimou o arco da ponte como uma parábola descrita por uma função quadrática, cujo vértice é definido pela coordenada $(0{,}3)$, em metros, além de situar o eixo das abscissas no nível do rio.
Além disso, a IA estimou que a distância horizontal total de abertura da ponte no nível do rio era de 4 metros e que a altura do homem sentado seria de $1{,}2$ m. Nesse caso, qual seria a lei de formação do arco a ser reposto na figura, considerando que ele está na parte positiva do eixo das abscissas?

$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$, para $-\sqrt{2{,}4} \leq x \leq \sqrt{2{,}4}$
$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$, para $\sqrt{2{,}4} \leq x \leq 2$
$f(x) = -4x^2 + 3$, para $\sqrt{0{,}45} \leq x \leq 2$
$f(x) = -4x^2 + 3$, para $0 \leq x \leq 2$
$f(x) = -4x^2 + 3$, para $-\sqrt{0{,}45} \leq x \leq \sqrt{0{,}45}$

Gabarito: $\boldsymbol{f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3}$**, para** $\boldsymbol{\sqrt{2,4} \leq x \leq 2}$

Solução:
A forma fatorada da função quadrática é $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$

Como a abertura da ponte no nível do rio é 4 m, as raízes devem ser ± 2, ou seja,

$$f(x) = a(x + 2)(x - 2) = a(x^2 - 4)$$

Usando o ponto $(0, 3)$: $3 = a(0 - 4) \Rightarrow a = -\frac{3}{4} \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{4}(x^2 - 4) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$.

A altura do homem sentado é $1{,}2$ m, ou seja,
$f(x) = 1{,}2 \Rightarrow -\frac{3}{4}(x^2 - 4) = 1{,}2 \Rightarrow x^2 - 4 = -1{,}6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2{,}4}$

Porém, o homem está na parte positiva do eixo *x*, então, o arco cortado é tal que $\sqrt{2{,}4} \leq x \leq 2$.

Os mecanismos de busca estão cada vez mais rápidos e precisos. São algoritmos que, por meio de engenharias sofisticadas, rastreiam páginas *Web* e as indexam a grandes bases de dados. Quando solicitados, a partir de algum termo ou palavra-chave de busca, ranqueiam certo número delas. Para que os mecanismos sejam ágeis, os dados na base precisam estar ordenados por critérios definidos pelo desenvolvedor.

Existem vários métodos de ordenação que se diferenciam pela rapidez, ou pela robustez, ou pelo uso de memória etc. Diante dessas informações, suponha que um mecanismo de busca, ao realizar a ordenação de uma quantidade n de elementos, consiga realizar n^2 operações no pior caso, e $n \cdot log n$ operações no melhor caso.

Em uma lista com $1.000.000$ de elementos, a razão entre a quantidade de operações no pior caso e a quantidade de operações no melhor caso é um número:

igual a 10
igual a 10^5
entre 10^4 e 10^5
entre 10^5 e 10^6
entre 10^6 e 10^7

Gabarito: entre $\mathbf{10^5}$ e $\mathbf{10^6}$

Solução:
No pior caso, a quantidade de operações será: $(10^6)^2 = 10^{12}$
No melhor caso, a quantidade de operações será: $10^6 \cdot log 10^6 \ = \ 10^6 \cdot 6 \cdot log 10 \ = \ 6 \cdot 10^6$
Razão: $r = \frac{10^{12}}{6 \cdot 10^6} = \frac{10^6}{6} \cong 1{,}67 \cdot 10^5 \Rightarrow 10^5 < r < 10^6$.

Veículos autônomos já estão sendo testados e, em breve, será possível parar na porta de embarque de um aeroporto e enviar o carro de forma autônoma para um estacionamento. Prova disso é o fato de as empresas Mercedes-Benz e Bosch já receberem autorização da KBA, uma espécie de federação automobilística da Alemanha, para o uso de um sistema autônomo de estacionamento no aeroporto de Stuttgart.

Sabe-se que sistemas autônomos como esse precisam trabalhar com distâncias calculadas entre o veículo e os pontos de referência em um sistema de coordenadas.

Suponha que, para um sistema de estacionamento autônomo, três antenas localizadas em regiões próximas emitam sinais para um veículo e, com isso, forneçam a distância entre as antenas e o veículo. Considerando que as antenas estão localizadas nos pontos $A(2,1), B(7,6)$ e $C(10,-3)$, pode-se afirmar que a posição P de um veículo autônomo que estivesse, simultaneamente, à mesma distância das três antenas seria:

$P(6,1)$
$P(6,2)$
$P(7,1)$
$P(8,0)$
$P(8,3)$

Gabarito: $\boldsymbol{P(7,1)}$

Solução:
Queremos o centro da circunferência que passa pelos pontos A, B e C.

O centro da circunferência circunscrita é o ponto de encontro das mediatrizes, portanto, basta calcular a mediatriz de AB e de AC. A mediatriz de um segmento é a perpendicular que passa pelo ponto médio deste segmento.

Mediatriz de AB: reta perpendicular a AB que passa pelo ponto médio do segmento AB.

$P_{médio(AB)} = \frac{A+B}{2} = \frac{(2,1)+(7,6)}{2} = \left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$ e $m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-1}{7-2} = 1 \Rightarrow m_{\perp AB} = -1$

$$y - \frac{7}{2} = (-1)\left(x - \frac{9}{2}\right) \Rightarrow y = -x + 8$$

Mediatriz de AC: reta perpendicular a AC que passa pelo ponto médio do segmento AC.

$P_{médio(AC)} = \frac{A+C}{2} = \frac{(2,1)+(10,-3)}{2} = (6,-1)$ e $m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3-1}{10-2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_{\perp AC} = 2$

$$y + 1 = 2(x - 6) \Rightarrow y = 2x - 13$$

Igualando:

$$-x + 8 = 2x - 13 \Rightarrow x = 7, y = 1 \Rightarrow P(7,1)$$

Uma empresa de comércio eletrônico pretende usar a estatística para trazer maior satisfação de seus clientes. Ao calcular o tempo previsto para a entrega de uma compra, essa empresa exibirá no site a seguinte mensagem:

“Tempo de entrega previsto: D dias”

Para calcular D, o sistema acessará todos os pedidos anteriores para a mesma cidade e somará a média dos tempos de entrega com três vezes o desvio padrão dos mesmos tempos. Caso D não resulte em um número inteiro, será informado o número inteiro imediatamente superior.

Com isso, é sabido que 99% dos pedidos serão entregues dentro do prazo informado.

Para determinada cidade, os tempos dos pedidos anteriores são estes:

Número do pedido	Tempo de entrega (dias)
1	10
2	6
3	12
4	15
5	10
6	7

Assim, é possível afirmar que a empresa, no sétimo pedido, mostrará a seguinte mensagem:

Tempo de entrega previsto: 3 dias.
Tempo de entrega previsto: 10 dias.
Tempo de entrega previsto: 13 dias.
Tempo de entrega previsto: 16 dias.
Tempo de entrega previsto: 19 dias.

Gabarito: Tempo de entrega previsto: 19 dias

Solução:
Cálculo da média: $\bar{x} = \frac{10+6+12+15+10+7}{6} = 10$

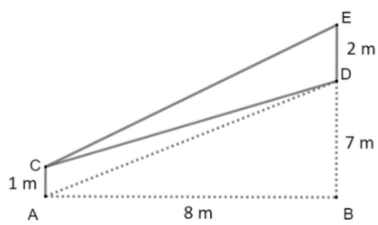
Cálculo do desvio padrão:
$$\sigma = \sqrt{\frac{(10-10)^2+(6-10)^2+(12-10)^2+(15-10)^2+(10-10)^2+(7-10)^2}{6}} = \sqrt{\frac{0+16+4+25+0+9}{6}} = \sqrt{9} = 3.$$

Intervalo de confiança: $(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma) = (1{,}19)$. O problema pede o limite superior, ou seja, 19 dias.

No hall de entrada do Inteli, Instituto de Tecnologia e Liderança, encontra-se um dos pontos mais procurados pelos visitantes para tirar fotos ou gravarem vídeos para suas mídias sociais.

Como pode ser visto na foto, esta entrada consiste em dois lances de escada e uma arquibancada, local onde os alunos podem acompanhar de um telão tudo que está acontecendo dentro do auditório.

Uma criança de 1 m encontra-se ao pé da escada, e deseja ver completamente o totem (desde sua base) que está instalado ao final do primeiro lance de escadas. Este lance de escadas tem 7 m de altura e 8m de profundidade e deseja-se colocar ao final dele um totem de 2 m de altura. A seguinte figura geométrica descreve a situação:



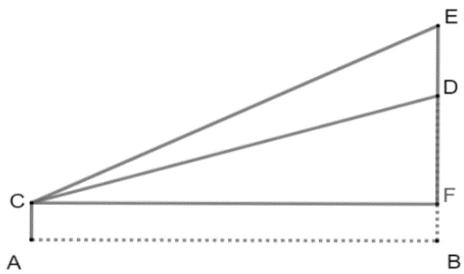
Esta vista trata-se de uma vista lateral, onde o triângulo ADB representa o primeiro lance de escadas (foi traçada uma linha entre o pé da escada e o ponto mais alto). AC representa a criança ao pé da escada e ED o totem instalado no ponto mais alto da escada.

Considerando $\sqrt{2} \cong 1{,}4$, a diferença entre os comprimentos EC e CD vale:

$11{,}2\text{ m}$
$3{,}2\text{ m}$
$2{,}8\text{ m}$
$1{,}2\text{ m}$
$0{,}6\text{ m}$

Gabarito: $\mathbf{1{,}2\ m}$

Solução:
Seja F o pé da perpendicular traçada por D.



$CF = AB = 8\text{ m}$ e $DF = DB - FB = 7 - 1 = 6\text{ m}$, portando o triângulo ECD é pitagórico e $CD = 10\text{ m}$.
Além disso, $EF = DF + ED = 6 + 2 = 8\text{ m}$.

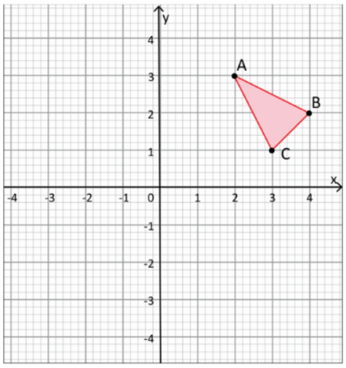
Então, o triângulo CFE é retângulo isósceles, assim, $EC = 8\sqrt{2} = 8 \times 1{,}4 = 11{,}2\text{ m}$.
Logo, $CE - CD = 11{,}2 - 10 = 1{,}2\text{ m}$

Os editores de imagem estão cada vez mais populares. Atualmente, coisas incríveis podem ser feitas utilizando softwares com esse fim. Esses editores realizam tarefas desde as mais simples, como girar, redimensionar ou transladar uma imagem, até as mais complicadas, como simular um rejuvenescimento ou recolorir uma paisagem. Dessa forma, o usuário pode ser bastante criativo em seus trabalhos.

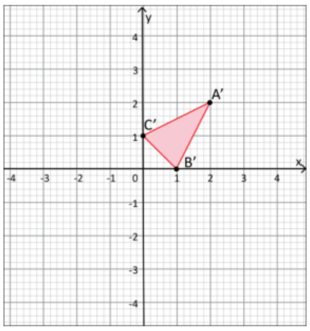
Essas manipulações envolvem muitas técnicas de computação gráfica e muitos cálculos, como o uso de matrizes e suas operações para alterar a posição ou a cor de um ponto na tela.

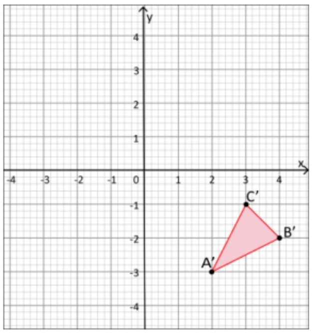
Considere uma matriz de transformação dada por $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ que, operada sobre cada ponto (x, y) do plano da tela, transforma uma figura inicial em uma nova imagem a partir do produto matricial $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, cujo resultado irá gerar as novas coordenadas de cada ponto.

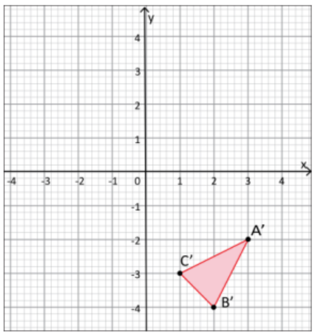
Considere a matriz de transformação anterior operando sobre a imagem apresentada neste plano cartesiano:

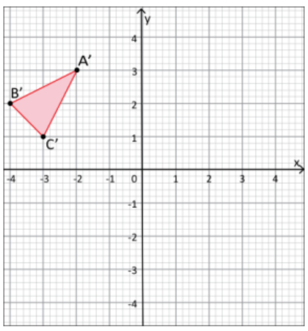


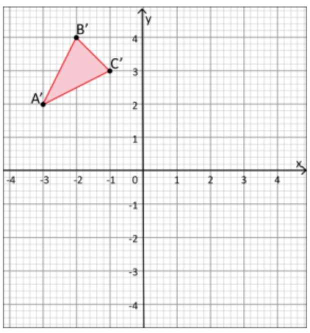
Com base no produto, a nova imagem está representada em:



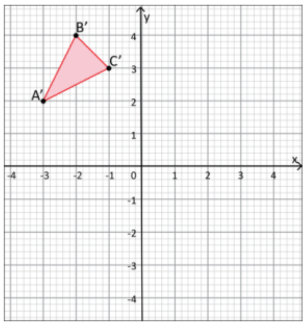








Gabarito:



Solução:

Aplicando a matriz nos pontos A, B e C:

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix};\ B' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ e } C' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Assim, devemos ter o triângulo formado pelos pontos $(-3, 2)$, $(-2, 4)$ e $(-1, 3)$.

Observação:

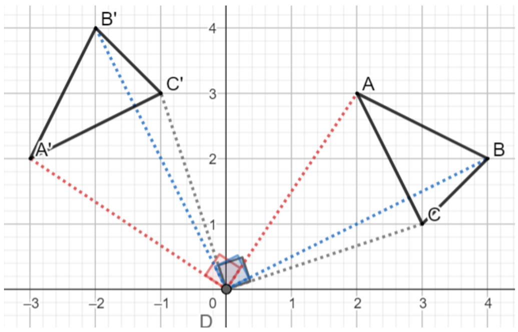
Uma transformação linear que pode ser feita através de matrizes é a rotação de um vetor. Para isso usa-se a matriz de rotação

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Quando multiplicamos um vetor (ou ponto) por esta matriz rotacionamos esse vetor de θ no sentido anti-horário.

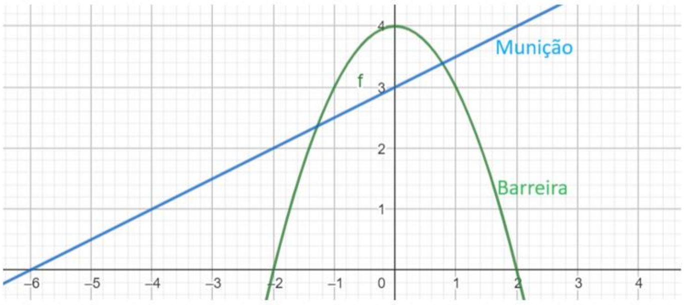
A matriz do enunciado $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ pode ser vista como uma matriz de rotação com $\theta = 90^o$.

Assim, ao aplicar a matriz no triângulo ABC têm-se a seguinte transformação linear:



Uma empresa produz jogos no estilo do famoso Angry Birds, onde o jogador deve arremessar objetos contra alvos de modo a derrubá-los. Porém, neste jogo, o objeto lançado é um projétil capaz até mesmo de atravessar os obstáculos. Por se tratar de uma munição, sua trajetória para distâncias curtas pode ser considerada retilínea, já que possui maior energia cinética.

Em uma fase do jogo, a barreira tem o formato parabólico e a munição será atirada um pouco antes deste obstáculo. A representação do que ocorre encontra-se na ilustração abaixo:



A munição será disparada do ponto $(-6, 0)$, mantendo sua trajetória retilínea ao ser lançada. A barreira é uma parábola de raízes ± 2 e vértice $(0,4)$. Sabendo que o coeficiente angular da reta de lançamento do projétil é $\frac{1}{2}$, determine a distância percorrida pelo projétil dentro do obstáculo.

$\frac{3\sqrt{85}}{2}$

$\sqrt{85}$

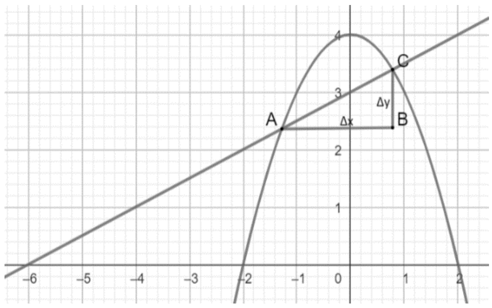
$\frac{\sqrt{85}}{3}$

$\frac{\sqrt{85}}{4}$

$\frac{2\sqrt{85}}{3}$

Gabarito: $\mathbf{\frac{\sqrt{85}}{4}}$

Solução:



Como o coeficiente angular da reta é $1/2$ e a raiz é -6, sua equação é: $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Já a parábola tem raízes ± 2 e vértice $(0,4)$, assim, sua equação é $y = -x^2 + 4$.

Igualando: $\frac{1}{2}x + 3 = -x^2 + 4 \Rightarrow 2x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$. Então, na figura, $\Delta x = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

Porém, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta y = \frac{\sqrt{17}}{4}$.

Pelo Teorema de Pitágoras, a distância pedida é: $\sqrt{\frac{17}{4} + \frac{17}{16}} = \frac{\sqrt{85}}{4}$

Uma *startup* em tecnologia deseja realizar um empréstimo junto a um banco de investimentos. Eles pretendem levantar uma quantia inicial de R\$ 1.000.000,00 e pagar o empréstimo em parcelas de no máximo R\$ 20.000,00, de modo a não prejudicar o fluxo de caixa da operação. Esse banco concede empréstimos a uma taxa de juros de 1% ao mês.

O departamento financeiro da empresa, após trazer as parcelas mensais que serão pagas a valor presente e realizar uma soma de PG para igualar com o valor do empréstimo, chegou à conclusão que as parcelas podem ser calculadas pela seguinte expressão:

$$P = \frac{C \times (1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1},$$

onde P é o valor da parcela, C é o valor do empréstimo, i é a taxa de juros e n é o número de parcelas.

Deste modo, qual o número mínimo de parcelas necessárias de modo a não prejudicar o fluxo de caixa da operadora, sabendo que $\log(1{,}01) = 0{,}00432$ e $\log(2) = 0{,}30102$?

70
69
61
60
50

Gabarito: 70

Solução:
Substituindo todos os valores na fórmula dada:

$$\frac{1.000.000 \times (1{,}01)^n \times 0{,}01}{(1{,}01)^n - 1} \leq 20.000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(1{,}01)^n}{(1{,}01)^n - 1} \leq 2 \Rightarrow (1{,}01)^n \leq 2 \times (1{,}01)^n - 2 \Rightarrow (1{,}01)^n \geq 2 \Rightarrow$$

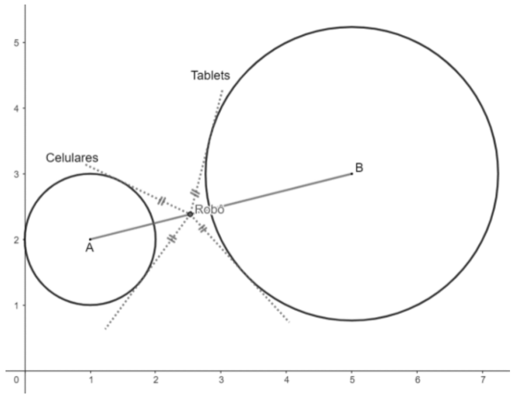
$$\Rightarrow n \geq \frac{\log 2}{\log 1{,}01} = \frac{0{,}30102}{0{,}00432} \cong 69{,}68$$

Desta forma, $n_{mín} = 70$.

Em um cenário corporativo, uma empresa de tecnologia gerencia dois tipos de produtos: celulares e tablets. Esses produtos são armazenados em dois galpões distintos, um para cada produto, conhecidos como centros de distribuição logística.

Para garantir a segurança desses centros de distribuição, um robô com uma câmera integrada é implantado na reta que une o centro dos galpões. Ao direcionar a câmera para um dos galpões, o ângulo de visão da câmera é otimizado para abranger todo o galpão com o menor ângulo possível. Além disso, as distâncias dos pontos extremos visíveis pela câmera são uniformes, independentemente do galpão em foco. Essa abordagem permite que o robô responda eficazmente a qualquer incidente.

O mapa da empresa é representado em um sistema de coordenadas, mostrando a localização dos galpões (circunferências), a localização do robô e o limite de visão da câmera quando monitora os galpões (linhas tracejadas, todas com o mesmo tamanho).



Sabendo que as circunferências têm equações:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=1 \text{ e } (x-5)^2+(y-3)^2=5,$$

determine a razão entre o menor e o maior tamanho determinados pelo robô sobre o segmento de reta AB

$\frac{13}{21}$

$\frac{5}{17}$

$\frac{14}{31}$

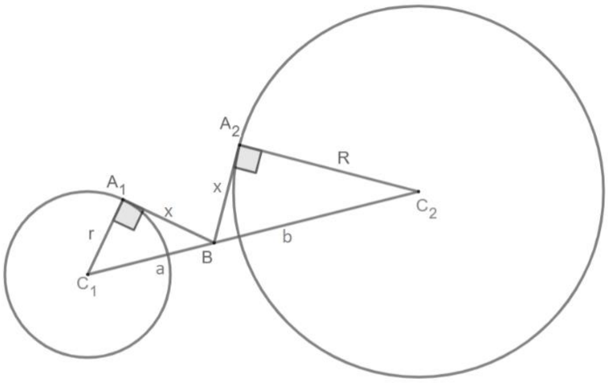
$\frac{8}{23}$

$\frac{7}{8}$

Gabarito: $\mathbf{\frac{13}{21}}$

Solução:

Seja x o tamanho das tangentes, $r = 1$ o raio da circunferência menor, $R = \sqrt{5}$ o raio da circunferência maior, a a distância do robô até o centro da distribuidora de celulares e b a distância do robô até o centro da distribuidora de tablets:



$$b + a = d(C_1, C_2) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

Teorema de Pitágoras:

$$\begin{cases} x^2 + r^2 = a^2 \Rightarrow x^2 + 1 = a^2 \\ x^2 + R^2 = b^2 \Rightarrow x^2 + 5 = b^2 \end{cases}$$

Subtraindo as equações: $b^2 - a^2 = 4 \Rightarrow (b+a)(b-a) = 4$

Então: $b - a = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$

$$\begin{cases} b + a = \sqrt{17} \\ b - a = \dfrac{4\sqrt{17}}{17} \end{cases} \Rightarrow b = \frac{21\sqrt{17}}{34}, a = \frac{13\sqrt{17}}{34} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{13}{21}$$

Um experimento realizado para testar um sistema de autenticação biométrica facial utilizou 5 pessoas. Entre essas pessoas, a média de idade foi de 21 anos; a mediana, 20 anos; e a moda, sendo um valor único, 26 anos.

Nessa situação, pode-se afirmar que a menor idade possível para um participante desse experimento foi de:

13 anos
14 anos
18 anos
19 anos
21 anos

Gabarito: 14 anos

Solução:
Considere x, y, z, w e q as idades das 5 pessoas em ordem crescente. Uma vez que a quantidade de termos é ímpar, a mediana é o termo central, portanto z=20.

Como a moda é 26 e existem dois termos acima de 20, é obrigatório que $w = q = 26$, caso contrário a sequência ou seria amodal (todos os termos apareceriam uma vez), ou a moda seria menor que 20, absurdo!

Usando a média e os fatos anteriores

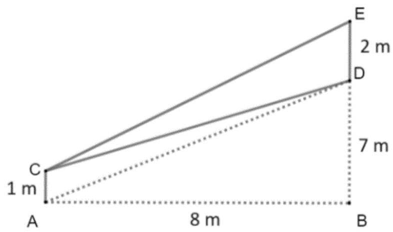
$$\frac{x + y + 20 + 26 + 26}{5} = 21 \Rightarrow x + y = 33$$

O enunciado pede a menor idade possível de um dos participantes devemos, ou seja, x mínimo e, portanto, y máximo. Porém, $y_{máx} = 19$ já que a sequência é unimodal e $y \leq z$.
Logo, $x_{mín} = 14$.

No hall de entrada do Inteli, Instituto de Tecnologia e Liderança, encontra-se um dos pontos mais procurados pelos visitantes para tirar fotos ou gravarem vídeos para suas mídias sociais.

Como pode ser visto na foto, esta entrada consiste em dois lances de escada e uma arquibancada, local onde os alunos podem acompanhar de um telão tudo que está acontecendo dentro do auditório.

Uma criança de $1\ m$ encontra-se ao pé da escada, e deseja ver completamente o totem (desde sua base) que está instalado ao final do primeiro lance de escadas. Este lance de escadas tem $7\ m$ de altura e 8m de profundidade e deseja-se colocar ao final dele um totem de $2\ m$ de altura.



A seguinte figura geométrica descreve a situação:

Esta vista trata-se de uma vista lateral, onde o triângulo ADB representa o primeiro lance de escadas (foi traçada uma linha entre o pé da escada e o ponto mais alto). AC representa a criança ao pé da escada e ED o totem instalado no ponto mais alto da escada.

Para que a criança enxergue todo totem, seu ângulo de visão, ou seja, o ângulo ECD deve ter cosseno igual a:

$\frac{7\sqrt{2}}{10}$

$\frac{\sqrt{2}}{10}$

$\frac{\sqrt{2}}{5}$

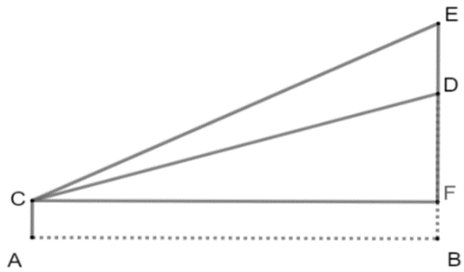
$\frac{7\sqrt{2}}{5}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Gabarito: $\mathbf{\frac{7\sqrt{2}}{10}}$

Solução:
Seja F o pé da perpendicular traçada por D.

$CF = AB = 8\text{ m}$ e $DF = DB - FB = 7 - 1 = 6\text{ m}$, portando o triângulo ECD é pitagórico e $CD = 10\text{ m}$.
Além disso, $EF = DF + ED = 6 + 2 = 8\text{ m}$.



Então, o triângulo CFE é retângulo isósceles, assim, $EC = 8\sqrt{2}$.

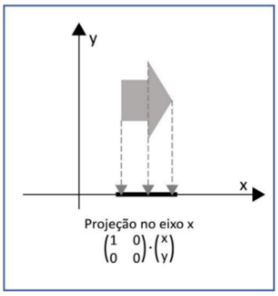
Agora, da Lei dos Cossenos: $\mathrm{ED}^2 = \mathrm{CD}^2 + \mathrm{CE}^2 - 2 \cdot \mathrm{CD} \cdot \mathrm{EC} \cdot \cos(\angle \mathrm{ECD})$.
Substituindo os valores:

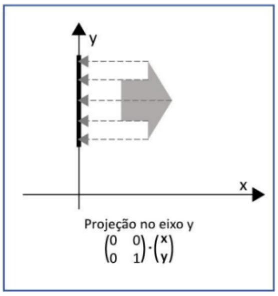
$$4 = 100 + 128 - 2 \cdot 10 \cdot 8\sqrt{2} \cdot \cos(\angle \mathrm{ECD}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 160\sqrt{2} \cdot \cos(\angle \mathrm{ECD}) = 224 \Rightarrow \cos(\angle \mathrm{ECD}) = \frac{224\sqrt{2}}{320} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

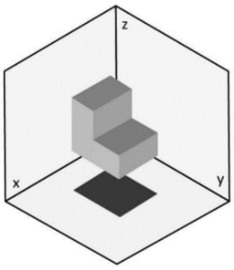
Na computação gráfica, a projeção é uma das ações que envolve o tratamento de imagem, principalmente para obter sombras de objetos.

Em um plano bidimensional, por exemplo, as projeções de uma figura plana nos eixos x ou y são feitas por meio do produto entre cada ponto da figura pelas matrizes $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, respectivamente:





A matriz que, operada sobre cada ponto (x, y, z) de uma figura espacial permite sua projeção no plano xy, como na figura a seguir, corresponde a:



$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

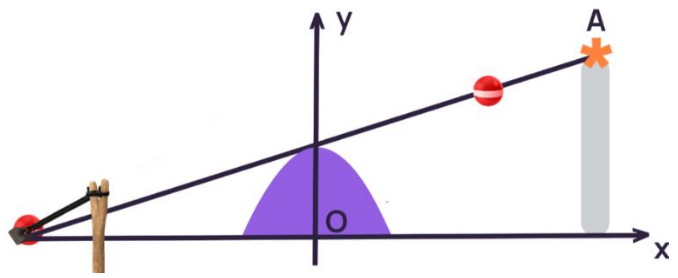
Gabarito: $\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$

Solução:
Os pontos da projeção no plano xy terão os valores de x e de y inalterados, e o valor da coordenada z zerado. Note que: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$

Uma empresa produz jogos no estilo do famoso *Angry Birds*, onde o jogador deve arremessar objetos contra alvos de modo a derrubá-los.

Em estágios mais avançados do jogo, existem barreiras que tentam impedir que esses objetos atinjam o alvo, então o jogador deve apontar estes em trajetórias adequadas de modo a não colidir ou ser impedido por essas barreiras.

Em uma fase do jogo, a barreira tem o formato de parábola e possui equação $y = -(x^2 - 12)$. O objeto será arremessado do ponto $(-4, 0)$ e deve manter uma trajetória retilínea ao ser lançado. Sabendo que o alvo A se encontra sobre a reta $x = 6$, determine a altura mínima que o programador do jogo deve colocar este alvo de modo a ser possível atingi-lo.



40
36
24
16
6

Gabarito:

Solução:
A equação reduzida da reta é $y = mx + q$. Como a reta passa pelo ponto $(-4, 0)$:
$0 = -4m + q \Rightarrow q = 4m$

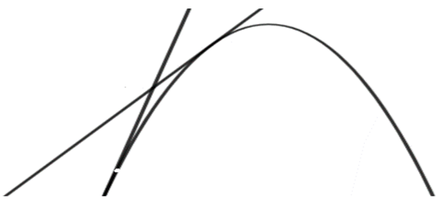
Assim, a trajetória do objeto lançado é $y = mx + 4m$

Para o objeto passar pela barreira, esta trajetória no mínimo deve ser tangente a parábola, assim, a reta e a parábola devem ter uma única interseção.

$$mx + 4m = -(x^2 - 12) \Rightarrow x^2 + mx + 4m - 12 = 0$$

Para a interseção ser única: $\Delta = 0 \Longrightarrow m^2 - 16m + 48 = 0 \Rightarrow m = 4$ ou $m = 12$

Temos dois valores, pois existem duas tangentes a parábola passando pelo ponto $(-4, 0)$. Na figura, têm-se uma representação da situação (as duas retas que saem de A são tangentes a parábola), onde vemos que a reta com menor coeficiente angular é a desejada.



Assim, a reta do objeto lançado é $y = 4x + 16$.
Como o alvo está sobre a reta $x = 6$, então $y = 4 \times 6 + 16 = 40$

O uso da computação em simulações de acidentes naturais é extremamente importante, pois é possível prever as consequências e, possivelmente, evitá-las.

A simulação sobre as consequências devastadoras de terremotos utiliza como modelo para o cálculo de sua magnitude M da escala Richter a seguinte fórmula matemática:

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right),$$

em que E é a energia liberada no terremoto, em kWh, e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh.

Em uma simulação, os programadores criaram duas situações: uma supondo uma magnitude $M_1 = 10$ e, outra, supondo uma magnitude $M_2 = 6$.

Nessa simulação, pode-se afirmar que a energia liberada na situação hipotética 1 é maior que a energia liberada na situação hipotética 2 em:

$\frac{5}{3}$
10^3
$5 \cdot 10^4$
10^6
$2 \cdot 10^8$

Gabarito: $\mathbf{10^6}$

Solução:
A definição de logaritmos diz que: $\log_b a = c \Rightarrow a = b^c$

Assim, na primeira situação:

$$10 = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E_1}{E_0}\right) \Rightarrow \log\left(\frac{E_1}{E_0}\right) = 15 \Rightarrow \frac{E_1}{E_0} = 10^{15} \Rightarrow E_1 = E_0 \cdot 10^{15}$$

Na segunda situação

$$6 = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E_2}{E_0}\right) \Rightarrow \log\left(\frac{E_2}{E_0}\right) = 9 \Rightarrow \frac{E_2}{E_0} = 10^9 \Rightarrow E_2 = E_0 \cdot 10^9$$

Dividindo:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_0 \cdot 10^{15}}{E_0 \cdot 10^9} = 10^6$$

Empresas de tecnologia acompanham constantemente a demanda do mercado para decidirem em que período podem lançar seus novos aparelhos. Por exemplo, próximo a datas festivas, como Dia dos Namorados, Dia das Mães, etc., existe um aumento da demanda devido a cultura popular da compra de presentes.

Uma desenvolvedora decide então criar um modelo matemático que acompanha a média de preços dos produtos pesquisados em seu site de vendas ao longo de cada mês. Após um ano armazenando tais informações, a empresa chega ao seguinte modelo:

$$P(x) = 5 - 3\cos\left(\frac{\pi x - 3\pi}{8}\right)$$

onde P representa o valor médio dos produtos pesquisados em centenas de reais e x é o mês correspondente, com $x = 1$ correspondendo ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim por diante. O modelo mostra que em alguns meses as pessoas estão mais dispostas a gastar do que em outros.

Além disso, sabe-se que 99% dos possíveis clientes que acessam o seu site buscando um produto estão dispostos a gastar no máximo 2,5 vezes o valor médio das pesquisas naquele mês.

Sabendo disso, esta desenvolvedora decide lançar seu novo *smartphone* exatamente no mês em que as pessoas estão dispostas a comprar produtos de maior valor. Sendo assim, em que mês ela deverá lançar seu novo produto e qual o valor máximo que ela pode colocar neste produto para que não exclua mais de 1% dos clientes?

março com valor de R$ 800,00.
março com valor de R$ 2.000,00.
outubro com valor de R$ 200,00.
novembro com valor de R$ 800,00.
novembro com valor de R$ 2.000,00.

Gabarito: novembro com valor de R$ 2.000,00

Solução:
A função cosseno oscila no intervalo $[-1,1]$. Como o sinal do cosseno em P é negativo, esta função será máxima se o cosseno for -1.

Note que: $\cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$\frac{\pi x - 3\pi}{8} = \pi + k\pi \Rightarrow x = 11 + k, k \in \mathbb{Z}$$

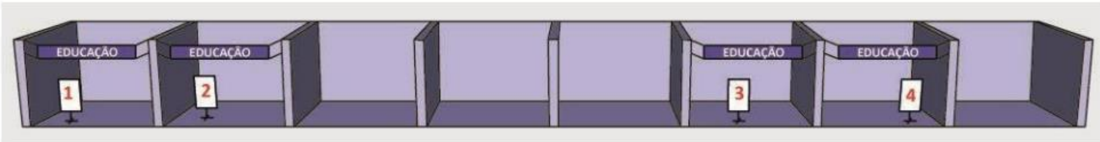
Como x representa um mês do ano, $x = 11$ (novembro).

Sendo o cosseno -1, têm-se $P_{máx} = 5 + 3 = 8$ centenas de reais, ou seja, o valor médio dos produtos pesquisados em novembro é R$ 800,00.

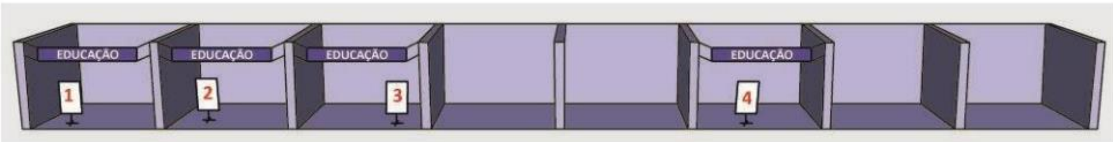
Porém, 99% das pessoas estão dispostas a gastar até $2{,}5 \cdot P_{máx} = 2{,}5 \cdot 800 =$ R$ 2.000,00.
Assim, se o valor do produto passar de R$ 2.000,00 perdesse mais de 1% dos clientes.

Em uma feira de inovação tecnológica, há um setor que contém 8 estandes dispostos um ao lado do outro. Para apresentar seus produtos, 4 diferentes *startups* de educação deverão ocupar cada um desses 8 estandes disponíveis, de forma que cada uma dessas *startups* sempre tenha pelo menos uma outra ao seu lado.

No caso abaixo, por exemplo, ao lado de cada uma das *startups*, há uma outra de educação:



Neste outro caso apresentado, *a startup* indicada pelo número 4 não possui uma outra ao seu lado e, desse modo, elas não poderão estar dispostas dessa forma:



A quantidade de maneiras distintas das quatro *startups* serem dispostas nesse setor é:

360
240
70
60
15

Gabarito: $\mathbf{360}$

Solução:
Listando as possíveis disposições nos estandes, vemos que há 15 configurações

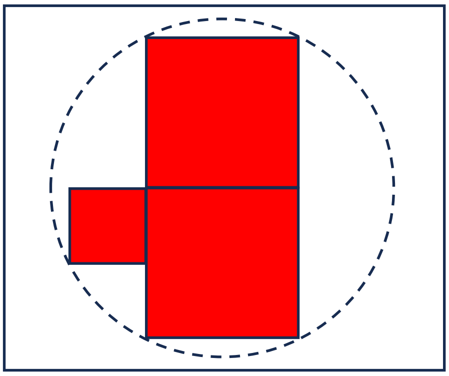
Observação: Existe uma forma de determinar este valor, sem listar. Essa solução é feita na prova P43.

Permutando as *startups*: $4! = 24$

Usando o princípio multiplicativo: $15 \times 24 = 360$

x	x	x	x				
	x	x	x	x			
		x	x	x	x		
			x	x	x	x	
				x	x	x	x
x	x		x	x			
x	x			x	x		
x	x				x	x	
x	x					x	x
	x	x		x	x		
	x	x			x	x	
	x	x				x	x
		x	x		x	x	
		x	x			x	x
			x	x		x	x

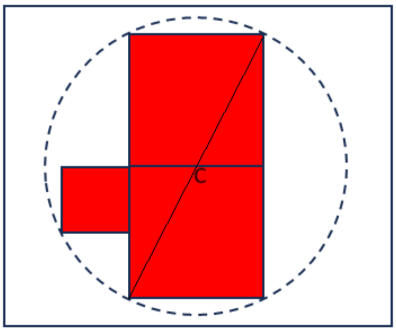
Um complexo formado por 3 prédios receberá uma única antena de Wi-Fi, cujo sinal cobrirá todo o conjunto. Essa antena será colocada no topo desse complexo e, sua cobertura circular, está identificada pela linha tracejada que contêm exatamente cinco pontos do complexo, conforme mostra a planta baixa a seguir.



Os prédios são todos quadrados, sendo que os dois maiores têm lado 40 m. Sabe-se que os três quadrados possuem exatamente um ponto de interseção. Nessas condições, qual é o percentual da área de cobertura do Wi-Fi ocupada pelo complexo de prédios?
Considere $\pi = 3{,}14$.

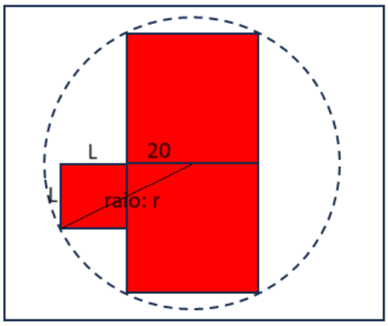
$65{,}23\%$
$61{,}15\%$
$57{,}32\%$
$52{,}36\%$
$48{,}18\%$

Gabarito: $57,32\%$



Traçando a diagonal do retângulo formado pelos quadrados maiores, como os lados do retângulo enxergam essa diagonal com ângulo de 90^o , esta diagonal é um diâmetro da circunferência. Se um retângulo está inscrito numa circunferência, então a interseção das diagonais é o centro desta circunferência.

Usando o Teorema de Pitágoras para calcular a diagonal do retângulo:
$d^2 = 40^2 + 80^2 = 8000 \Rightarrow d = 40\sqrt{5}\,\mathrm{m} \Rightarrow r = 20\sqrt{5}$



Ligando o centro ao vértice do quadrado menor da circunferência e usando o Teorema de Pitágoras:
$(L+20)^2 + L^2 = \left(20\sqrt{5}\right)^2 = 2000 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2L^2 + 40L - 1600 = 0 \Rightarrow L^2 + 20L - 800 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow L = -40$ (impossível) ou $L = 20$ m.

Área dos prédios: $20^2 + 2 \times 40^2 = 3600\ \mathrm{m}^2$
Área de cobertura: $\pi r^2 = 3{,}14 \times 2000 = 6280\ \mathrm{m}^2$
Percentual: $\frac{3600}{6280} = 57{,}32\%$

Uma agência de publicidade controla o canal de um influenciador A, que posta um vídeo sobre tecnologia semanalmente, e está testando estratégias para promoção e aumento da audiência desse canal.

Analisando o comportamento de certo grupo que assiste vídeos de tecnologia, uma pesquisa identificou algumas informações, que estão descritas na seguinte matriz de transição:

$$\begin{array}{cc} & \textit{Estado Precedente} \\ & \begin{array}{cc} \text{A} & \text{O} \end{array} \\ P = & \begin{bmatrix} 0{,}70 & 0{,}50 \\ 0{,}30 & 0{,}50 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{O} \end{array} \ \textit{Novo Estado} \end{array}$$

Nela, vemos que 70% das pessoas do grupo que atualmente seguem o influenciador A querem ver um novo vídeo dele na próxima semana, enquanto 30% deles pretendem assistir o vídeo de outros canais, indicados por O, em valores aproximados.

Na mesma matriz, ainda podemos ver que entre os que atualmente seguem outros influenciadores, indicados por O, cerca de 50% vão continuar com eles na próxima semana e 50% vão para o canal do influenciador A.

No início da pesquisa, também foi verificado que o canal A detém 30% dessa audiência e os demais, O, ficam com 70% desse grupo, fornecendo o seguinte vetor de estado inicial:

$$X^0 = \begin{bmatrix} 0{,}30 \\ 0{,}70 \end{bmatrix}$$

Logo, o vetor de estado depois da primeira semana X^1 é dado pelo produto $P \cdot X^0$:

$$X^1 = P \cdot X^0 = \begin{bmatrix} 0{,}70 & 0{,}50 \\ 0{,}30 & 0{,}50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}30 \\ 0{,}70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}56 \\ 0{,}44 \end{bmatrix}$$

Isso significa que, depois da primeira semana, espera-se que aproximadamente 56% das pessoas do grupo assistirão o vídeo do canal A e 44% assistirão os vídeos dos demais canais.

Continuando com esse processo e análise, no qual $X^{n+1} = P \cdot X^n$ e sempre usando duas casas decimais após a vírgula, à medida que o tempo passa, se esse grupo em análise é formado por 160.000 pessoas, qual é o número mais próximo da quantidade esperada de expectadores para o vídeo do canal A depois da quarta semana, com base no vetor de estado X^4?

99.200
72.500
65.600
58.900
82.300

Gabarito: $\mathbf{99.200}$

Solução:
Depois da segunda semana, o vetor de estado é

$$X^2 = P \cdot X^1 = \begin{bmatrix} 0,70 & 0,50 \\ 0,30 & 0,50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,56 \\ 0,44 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,61 \\ 0,39 \end{bmatrix}$$

Depois da terceira semana, o vetor de estado é

$$X^3 = P \cdot X^2 = \begin{bmatrix} 0,70 & 0,50 \\ 0,30 & 0,50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,61 \\ 0,39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,62 \\ 0,38 \end{bmatrix}$$

Depois da quarta semana, o vetor de estado é

$$X^4 = P \cdot X^4 = \begin{bmatrix} 0,60 & 0,50 \\ 0,40 & 0,50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,62 \\ 0,38 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,62 \\ 0,38 \end{bmatrix}$$

Assim, o valor de expectadores para o vídeo A será:

$$0,62 \times 160.000 = 99.200$$

Imagine que você está trabalhando no desenvolvimento de um robô de entrega autônomo para uma empresa de logística. O robô foi programado para seguir uma série de instruções específicas para chegar ao seu destino. O trajeto é definido da seguinte forma:

1. O robô parte do ponto inicial, onde sua bateria é carregada, e anda 9 metros em linha reta até o ponto de distribuição de comida.
2. Em seguida, o robô vira 90 graus no sentido anti-horário e anda mais 12 metros em linha reta até o ponto de distribuição de bebidas.
3. Após isso, o robô muda de direção, novamente girando no sentido anti-horário, de forma que o ângulo entre sua nova direção e o segmento que une a distribuidora de bebidas e o ponto de partida seja reto. Agora ele anda 8 metros até o local onde se encontra a parte administrativa da empresa, que aguarda pela comida e a bebida a serem entregues diariamente pelo robô.

Todo esse deslocamento não seria necessário se os centros de distribuição de comida e bebida se encontrassem no mesmo local onde o robô carrega sua bateria. Neste caso, bastaria ele girar θ no sentido anti-horário, onde θ é o ângulo entre as semirretas com origem no ponto inicial e que passam pelos pontos de distribuição de comida e pela administração, e ir diretamente até à equipe administrativa da empresa. Determine o cosseno deste ângulo θ.

$\frac{1}{5}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{8}{25}$

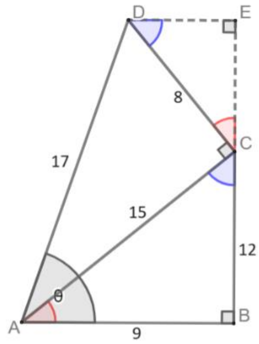
$\frac{12}{65}$

$\frac{13}{85}$

Gabarito: $\mathbf{\frac{13}{85}}$

Solução:

Considere o desenho ao lado, onde AB representa o deslocamento do ponto de recarga até o setor de distribuição de comida; BC até a distribuição de bebidas; CD até o setor administrativo. O segmento AC pode ser determinado pelo Teorema de Pitágoras no triângulo ABC e AD no triângulo ACD.



Considere o triângulo retângulo CED obtido pelo prolongamento de BC e pela perpendicular a reta suporte de BC passando por D.

Usando ângulos complementares, vemos que os ângulos indicados com a mesma cor são iguais. Portanto, os triângulos ABC e CDE são semelhantes.

$$\frac{12}{DE} = \frac{15}{8} \Rightarrow DE = \frac{32}{5};\ \frac{9}{EC} = \frac{15}{8} \Rightarrow EC = \frac{24}{5}$$

Seja D' a projeção ortogonal de D em AB, $AD' = AB - BD' = 9 - \frac{32}{5} = \frac{13}{5}$

$$\cos\theta = AD'/AD = \frac{13/5}{17} = 13/85$$

Em uma feira de inovação tecnológica, há um setor que contém 6 estandes dispostos um ao lado do outro. Para apresentar seus produtos, 4 diferentes *startups* de educação deverão ocupar cada um desses 6 estandes disponíveis, de forma que cada uma dessas *startups* sempre tenha pelo menos uma outra ao seu lado.

No caso abaixo, por exemplo, ao lado de cada uma das *startups*, há outra de educação:

Neste outro caso apresentado, *a startup* indicada pelo número 4 não possui uma outra ao seu lado e, desse modo, elas não poderão estar dispostas dessa forma:

Além disso, sabe-se que 6 pessoas estarão presentes no horário de abertura da feira.

A quantidade de maneiras distintas das quatro *startups* serem dispostas nesse setor recebendo todas pelo menos um dos 6 visitantes no horário de abertura é.

224.640
9.360
1.560
720
6

Gabarito: 224.640

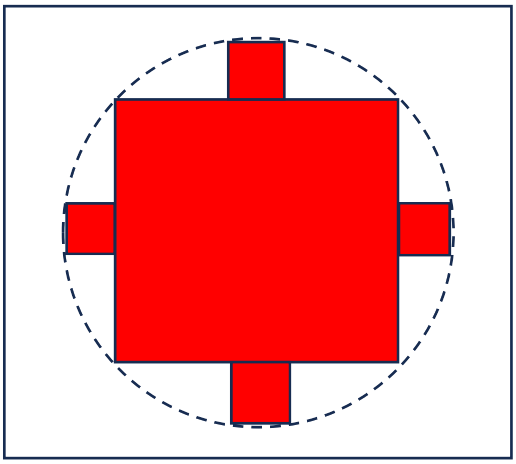
x	x	x			
	x	x	x	x	
		x	x	x	x
x	x		x	x	
x	x			x	x
	x	x		x	x

Solução:
Listando as possíveis disposições nos estandes 6 configurações.
Permutando as *startups*: $4! = 24$

Por serem 6 pessoas podemos distribuir das seguintes formas:
$3/1/1/1$: 4 possibilidades permutando esses números
Escolha das pessoas: $C_{6,3} \cdot C_{3,1} \cdot C_{2,1} \cdot C_{1,1} = 20 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
Nesse caso então temos: $120 \times 4 = 480$ possibilidades de distribuir as pessoas
$2/2/1/1$: 6 possibilidades permutando esses números
Escolha das pessoas: $C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,1} \cdot C_{1,1} = 15 \times 6 \times 2 \times 1 = 180$
Nesse caso então temos: $6 \times 180 = 1080$ possibilidades de distribuir as pessoas
Somando os casos: $1.080 + 480 = 1.560$ formas de distribuir as pessoas nas *startups*.

Então, o número de distribuições das *startups* e das pessoas será: $6 \times 24 \times 1.560 = 224.640$

Um complexo formado por 5 prédios receberá uma única antena de Wi-Fi, cujo sinal cobrirá todo o conjunto. Essa antena será colocada no topo desse complexo e, sua cobertura circular, está identificada pela linha tracejada que contêm exatamente 12 pontos, conforme mostra a planta baixa a seguir.



Os prédios são todos quadrados, sendo que o maior deles tem lado $60\ \mathrm{m}$. Nessas condições, qual é o percentual da área de cobertura de cobertura de Wi-Fi ocupada pelo complexo de prédios?
Considere $\pi = 3{,}14$.

$81{,}25\%$
$78{,}45\%$
$73{,}86\%$
$65{,}58\%$
$58{,}29\%$

Gabarito: $\mathbf{73{,}86}\%$

Solução:
A diagonal do quadrado maior é um diâmetro da circunferência. Assim, $2r = L\sqrt{2} = 60\sqrt{2} \Rightarrow r = 30\sqrt{2}$.

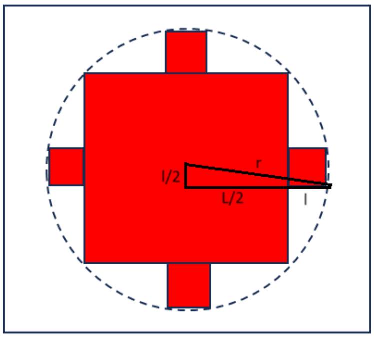
Formando o triângulo retângulo abaixo e usando o teorema de Pitágoras

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2} + l\right)^2 = r^2 = \left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5l^2}{4} + \frac{L^2}{4} + Ll = \frac{L^2}{2} \Rightarrow \frac{L^2}{4} - Ll - \frac{5l^2}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L^2 - 4lL - 5l^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = 5l \text{ ou } L = -l \text{ (impossível)} \Rightarrow l = \frac{L}{5} = 12\ \mathrm{m}$$



Área dos prédios: $60^2 + 4 \times 12^2 = 4176\ \mathrm{m}^2$
Área de cobertura: $\pi r^2 = 3{,}14 \times 1800 = 5652\ \mathrm{m}^2$
Percentual: $\frac{4176}{5652} = 73{,}86\%$

Uma agência de publicidade controla os canais de dois influenciadores, A e B, que postam um vídeo sobre tecnologia semanalmente, e está testando estratégias para promoção e aumento da audiência desses canais.

Analisando o comportamento de certo grupo que assiste a vídeos de tecnologia, uma pesquisa identificou algumas informações, que estão descritas na seguinte matriz de transição:

$$\begin{array}{cc} & \textit{Estado Precedente} \\ & \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{O} \end{array} \\ P = & \begin{bmatrix} 0{,}30 & 0{,}50 & 0{,}40 \\ 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}30 \\ 0{,}40 & 0{,}20 & 0{,}30 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{O} \end{array} \textit{Novo Estado} \end{array}$$

Nela, vemos que 30% das pessoas que atualmente seguem o influenciador A querem ver um novo vídeo dele na próxima semana, enquanto 30% pretendem assistir ao vídeo do influenciador B e 40% vão para outros canais, indicados por O, em valores aproximados.

Na mesma matriz, entre os que seguem o influenciador B, cerca de 30% vão continuar vendo o próximo vídeo dele, enquanto 50% têm interesse em ir para o canal A e 20% vão mudar para outros canais, indicados por O.

Por último, entre os que atualmente seguem outros influenciadores, O, cerca de 30% vão continuar com eles na próxima semana, 40% vão migrar para o A e 30% vão para o B.

No início da pesquisa, também foi verificado que o canal A detém 47% dessa audiência, o canal B detém 28% e os demais, O, ficam com 25% desse grupo, fornecendo o seguinte vetor de estado inicial:

$$X^0 = \begin{bmatrix} 0{,}47 \\ 0{,}28 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}$$

Logo, o vetor de estado depois da primeira semana X^1 é dado pelo produto $P \cdot X^0$:

$$X^1 = P \cdot X^0 = \begin{bmatrix} 0{,}30 & 0{,}50 & 0{,}40 \\ 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}30 \\ 0{,}40 & 0{,}20 & 0{,}30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}47 \\ 0{,}28 \\ 0{,}25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}38 \\ 0{,}30 \\ 0{,}32 \end{bmatrix}$$

Isso significa que, depois da primeira semana, aproximadamente 38% das pessoas do grupo assistirão ao vídeo do canal A, 30% assistirão ao vídeo do canal B e 32% assistirão aos vídeos dos demais canais, O.

Continuando com esse processo e análise, no qual $X^{n+1} = P \cdot X^n$ e sempre usando duas casas decimais após a vírgula, à medida que o tempo passa, se esse grupo em análise é formado por 160.000 pessoas, qual é o número mais próximo da quantidade esperada de espectadores para o vídeo do canal A depois da quarta semana, com base no vetor de estado X^4?

71.700
62.400
52.600
86.800
41.500

Gabarito: 62.400

Solução:
Depois da segunda semana, o vetor de estado é

$$X^2 = P \cdot X^1 = \begin{bmatrix} 0{,}30 & 0{,}50 & 0{,}40 \\ 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}30 \\ 0{,}40 & 0{,}20 & 0{,}30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}47 \\ 0{,}28 \\ 0{,}25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}38 \\ 0{,}30 \\ 0{,}32 \end{bmatrix}$$

Depois da terceira semana, o vetor de estado é

$$X^3 = P \cdot X^2 = \begin{bmatrix} 0{,}30 & 0{,}50 & 0{,}40 \\ 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}30 \\ 0{,}40 & 0{,}20 & 0{,}30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}38 \\ 0{,}30 \\ 0{,}32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}39 \\ 0{,}30 \\ 0{,}31 \end{bmatrix}$$

Depois da quarta semana, o vetor de estado é

$$X^4 = P \cdot X^3 = \begin{bmatrix} 0{,}30 & 0{,}50 & 0{,}40 \\ 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}30 \\ 0{,}40 & 0{,}20 & 0{,}30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}39 \\ 0{,}30 \\ 0{,}31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}39 \\ 0{,}30 \\ 0{,}31 \end{bmatrix}$$

Assim, o valor de expectadores para o vídeo A será:

$$0{,}39 \times 160.000 = 62.400$$

A função $f(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t)$ é frequentemente utilizada para modelar fenômenos oscilatórios, sendo um importante modelo para propagação de sinais sonoros. Esta mesma função pode ser reescrita no formato $f(t) = C \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$, para isto basta dividir a função por $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, e escrever $\frac{A}{C}$ e $\frac{B}{C}$ como $\cos\varphi_0$ e $\text{sen}\varphi_0$, respectivamente, onde $\varphi_0 \in [0, 2\pi[$.

Imagine um alto-falante reproduzindo um sinal sonoro de acordo com esta última função. Nesse caso, a constante C determina a amplitude da onda, a constante ω é a velocidade angular (inversamente proporcional ao período), e o deslocamento de fase φ_0 ajusta o início da saída da onda sonora, sendo essencial para sincronizar o som reproduzido com outras fontes.

Por exemplo, a função $f(t) = 3\,\text{sen}\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ tem amplitude 3, fase inicial $\frac{\pi}{4}$ e período 2π (período da função seno).

Uma empresa de tecnologia, responsável pela instalação de alto-falantes numa faculdade, utilizou o seguinte modelo de propagação de som $f(t) = \text{sen}(2t) + \cos{(2t)}$. Nesse caso, se outro funcionário escrever esta mesma função no segundo formato, ou seja, escrever na forma $f(t) = C \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$, qual seria a amplitude, o período e a fase inicial da onda, respectivamente?

$\sqrt{2}$, 2π e $\frac{\pi}{4}$

$\sqrt{2}$, π e $\frac{\pi}{4}$

$\sqrt{2}$, π e $\frac{\pi}{2}$

1, 2π e $\frac{\pi}{4}$

1, 2π e $\frac{\pi}{2}$

Gabarito: $\boldsymbol{\sqrt{2}, \pi}$ e $\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

Solução:
Dividindo $f(t)$ por $C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

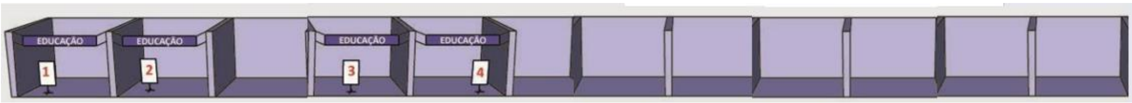
$$\frac{f(t)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen}(2t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(2t) = \cos\frac{\pi}{4}\text{sen}(2t) + \text{sen}\frac{\pi}{4}\cos(2t) = \text{sen}\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Então: $f(t) = \sqrt{2}\text{sen}\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$.
Comparando com $C \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$, temos $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ (fase inicial).

Sabe-se do enunciado que a velocidade angular e o período são inversamente proporcionais, assim: $\omega T = k$. Ainda do enunciado, para $\omega = 1$ o período é 2π (período da função seno), ou seja, $k = 2\pi$. Então para $\omega = 2$: $2T = 2\pi \Rightarrow T = \pi$.

Em uma feira de inovação tecnológica, há um setor que contém 12 estandes dispostos um ao lado do outro. Para apresentar seus produtos, 4 diferentes *startups* de educação deverão ocupar cada um desses 12 estandes disponíveis, de forma que cada uma dessas *startups* sempre tenha pelo menos uma outra ao seu lado.

No caso abaixo, por exemplo, ao lado de cada uma das startups, há outra de educação:



Neste outro caso apresentado, *a startup* indicada pelo número 4 não possui uma outra ao seu lado e, desse modo, elas não poderão estar dispostas dessa forma:

A quantidade de maneiras distintas das quatro *startups* serem dispostas nesse setor é:

1.080
720
360
45
24

Gabarito: $\mathbf{1.080}$

Solução:
Primeiro será definido apenas o local das *startups*. Olhando da esquerda para a direita, chame os estandes ocupados de 1, 2, 3 e 4, na ordem que forem sendo ocupados (conforme a figura do enunciado).

Como o estande 1 não pode ficar isolado, a sua direita sempre teremos o estande 2.
Como o estande 4 não pode ficar isolado, a sua esquerda sempre teremos o estande 3.
Assim, existe o bloco 12 e o bloco 34 que podem estar juntos ou separados.

Seja x o número de estandes vazios antes do bloco 12, y o número de estandes vazios entre os blocos 12 e 34 e z a quantidade de estandes vazios depois do bloco 34, então:

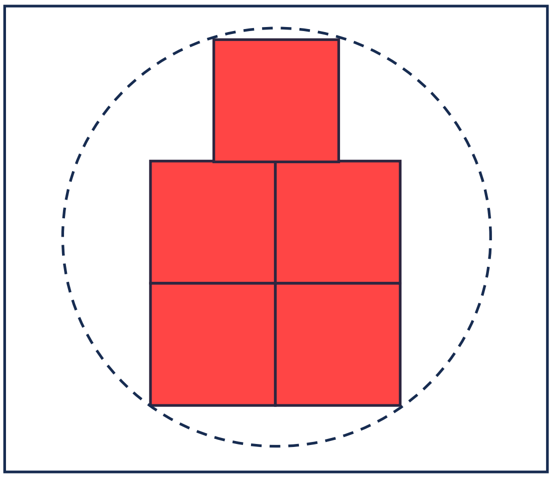
$$x + y + z = 8 \text{ (total de estandes vazios)}$$

O número de soluções inteiras não-negativas dessa equação é: $CR_{3,8} = \frac{10!}{8!2!} = 45$

Como as *startups* são diferentes, é necessário permutar, ou seja, multiplicar por $4! = 24$.

Então, a resposta seria $45 \times 24 = 1.080$.

Um complexo formado por 5 prédios receberá uma única antena de Wi-Fi, cujo sinal cobrirá todo o conjunto. Essa antena será colocada no topo desse complexo e, sua cobertura circular, está identificada pela linha tracejada que contém exatamente quatro pontos do complexo, conforme mostra a planta baixa a seguir.

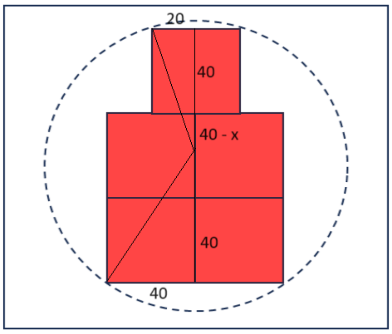


Os prédios são quadrados, todos de lado 40 m. Nessas condições, qual é o percentual da área de cobertura de Wi-Fi ocupada pelo complexo de prédios?
Considere $\pi = 3{,}14$.

55%
47%
44%
40%
33%

Gabarito: 55%

Solução:
Por simetria, a reta vertical a qual pertence a interseção de quatro prédios contêm o centro da circunferência e divide o lado do quadrado superior ao meio. Ligando este centro a dois vértices que pertencem a circunferência, temos a figura abaixo:



Utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$40^2 + (40 + x)^2 = r^2 \Rightarrow 3200 + 80x + x^2 = r^2$$

$$20^2 + (80 - x)^2 = r^2 \Rightarrow 6800 - 160x + x^2 = r^2$$

Subtraindo as equações, $-3600 + 240x = 0 \Rightarrow x = 15\ m$

$r^2 = 3200 + 80 \times 15 + 15^2 = 3200 + 1200 + 225 = 4625 \Rightarrow r = 5\sqrt{185}$ m

Área dos prédios: $5 \times 40^2 = 8.000$ m^2
Área de cobertura: $\pi r^2 = 3{,}14 \times 4625 = 14.522{,}5$ m^2
Percentual: $\frac{8.000}{14522{,}5} = 55\%$

Uma agência de publicidade controla o canal de um influenciador A, que posta um vídeo sobre tecnologia semanalmente, e está testando estratégias para promoção e aumento da audiência desse canal.

Analisando o comportamento de certo grupo que assiste a vídeos de tecnologia, uma pesquisa identificou algumas informações, que estão descritas na seguinte matriz de transição:

$$\begin{array}{c} \textit{Estado Precedente} \\ \begin{array}{ccc} & \text{A} & \text{O} \\ P = & \begin{bmatrix} 0{,}70 & 0{,}50 \\ 0{,}30 & 0{,}50 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{A} \\ \text{O} \end{array} \ \textit{Novo Estado} \end{array} \end{array}$$

Nela, vemos que 70% das pessoas do grupo que atualmente seguem o influenciador A querem ver um novo vídeo dele na próxima semana, enquanto 30% deles pretendem assistir aos vídeos de outros canais, indicados por O, em valores aproximados.

Na mesma matriz, ainda podemos ver que entre os que atualmente seguem outros influenciadores, indicados por O, cerca de 50% vão continuar com eles na próxima semana e 50% vão para o canal do influenciador A.

No início da pesquisa, também foi verificado que o canal A detém 30% dessa audiência e os demais, O, ficam com 70% desse grupo, fornecendo o seguinte vetor de estado inicial:

$$X^0 = \begin{bmatrix} 0{,}30 \\ 0{,}70 \end{bmatrix}$$

Logo, o vetor de estado depois da primeira semana X^1 é dado pelo produto $P \cdot X^0$:

$$X^1 = P \cdot X^0 = \begin{bmatrix} 0{,}70 & 0{,}50 \\ 0{,}30 & 0{,}50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}30 \\ 0{,}70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}56 \\ 0{,}44 \end{bmatrix}$$

Isso significa que, depois da primeira semana, espera-se que aproximadamente 56% das pessoas do grupo assistirão ao vídeo do canal A e 44% assistirão aos vídeos dos demais canais.

Continuando com esse processo e análise, no qual $X^{n+1} = P \cdot X^n$ e sempre usando duas casas decimais após a vírgula, à medida que o tempo passa, depois de qual semana a taxa de visualização estimada do vídeo do canal A apresentará um aumento, em relação à semana anterior, menor do que 2% pela primeira vez?

2ª semana
3ª semana
4ª semana
5ª semana
6ª semana

Gabarito: 3ª semana

Solução:

Depois da primeira semana, o aumento estimado da taxa de visualização do vídeo do canal A é de $\frac{0{,}56-0{,}30}{0{,}30} \cong 86{,}67\%$ em relação à semana anterior.

Depois da segunda semana, o vetor de estado é

$$X^2 = P \cdot X^1 = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}56 \\ 0{,}44 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}61 \\ 0{,}39 \end{bmatrix}$$

e verifica-se um crescimento de $\frac{0{,}61 - 0{,}56}{0{,}56} \cong 8{,}93\%$ em relação à semana anterior.
Note que este valor é bem menor do que a variação anterior, o que indica que a sequência deve convergir.

Depois da terceira semana, o vetor de estado é

$$X^3 = P \cdot X^2 = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}61 \\ 0{,}39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}62 \\ 0{,}38 \end{bmatrix}$$

e verifica-se um crescimento de $\frac{0{,}62 - 0{,}61}{0{,}61} \cong 1{,}64\%$ em relação a semana anterior, menor do que o 2% procurado.

A função $f(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t)$ é frequentemente utilizada para modelar fenômenos oscilatórios, sendo um importante modelo para propagação de sinais sonoros. Esta mesma função pode ser reescrita no formato $f(t) = C \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$.

Imagine um alto-falante reproduzindo um sinal sonoro de acordo com esta última função. Nesse caso, a constante C determina a amplitude da onda, a constante ω controla a frequência, e o deslocamento de fase φ_0 ajusta o início da saída da onda sonora, sendo essencial para sincronizar o som reproduzido com outras fontes.

Uma empresa de tecnologia, responsável pela instalação de alto-falantes numa faculdade, utilizou o seguinte modelo de propagação de som $f(t) = \text{sen}t + \cos t$. Porém, ao tentar escrever no segundo formato, um funcionário da mesma empresa escreveu a função da seguinte forma $f(t) = \cos(2t)$, sendo esta função diferente da apresentada anteriormente.

Para quantos valores de t, considerando $t \in [0,2\pi[$, ambos os funcionários encontrarão o mesmo resultado?

1

2

3

4

5

Gabarito: 4

Solução:
Usando a fórmula do arco duplo: $\text{sen}t + \cos t = \cos(2t)$

Elevando ao quadrado (usando a relação fundamental e $\text{sen}(2t) = 2 \cdot \text{sen}t \cdot \cos t$)

$$1 + \text{sen}(2t) = \cos^2(2t) = 1 - \text{sen}^2(2t) \Longrightarrow \text{sen}(2t) = 0 \text{ ou } \text{sen}(2t) = -1 \Rightarrow$$

$$t \in [0,2\pi[\Rightarrow 2t \in [0,4\pi[$$

$$2t \in \left[0, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, 3\pi, \frac{7\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in \left[0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$$

Como elevamos ao quadrado temos que testar todas as raízes

$$t = 0: \ \ 0 + 1 = 1 \ \text{(ok)}$$

$$t = \frac{\pi}{2}: \ \ 1 + 0 = -1 \ \text{(absurdo)}$$

$$t = \frac{3\pi}{4}:\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0\ \text{(ok)}$$

$$t = \pi:\ 0 - 1 = 1\ \text{(absurdo)}$$

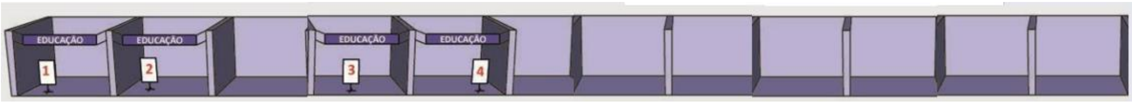
$$t = \frac{3\pi}{2}: -1 + 0 = -1\ \text{(ok)}$$

$$t = \frac{7\pi}{4}: -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0\ \text{(ok)}$$

Temos então as seguintes respostas: $t = 0, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$, ou seja, 4 soluções.

Em uma feira de inovação tecnológica, há um setor que contém 12 estandes dispostos um ao lado do outro. Para apresentar seus produtos, 4 diferentes *startups* de educação deverão ocupar cada um desses 12 estandes disponíveis, de forma que cada uma dessas *startups* sempre tenha pelo menos uma outra ao seu lado.

No caso abaixo, por exemplo, ao lado de cada uma das startups, há outra de educação:



Neste outro caso apresentado, *a startup* indicada pelo número 4 não possui uma outra ao seu lado e, desse modo, elas não poderão estar dispostas dessa forma

Além disso, sabe-se que 6 pessoas estarão presentes no horário de abertura da feira.

A quantidade de maneiras distintas das quatro *startups* serem dispostas nesse setor recebendo todas pelo menos um dos 6 visitantes no horário de abertura é:

1.684.800
224.640
9.360
1.080
720

Gabarito: $\mathbf{1.684.800}$

Solução:
Primeiro será definido apenas o local das *startups*. Olhando da esquerda para a direita, chame os estandes ocupados de 1, 2, 3 e 4, na ordem que forem sendo ocupados (conforme a figura do enunciado).

Como o estande 1 não pode ficar isolado, a sua direita sempre teremos o estande 2.
Como o estande 4 não pode ficar isolado, a sua esquerda sempre teremos o estande 3.
Assim, existe o bloco 12 e o bloco 34 que podem estar juntos ou separados.

Seja x o número de estandes vazios antes do bloco 12, y o número de estandes vazios entre os blocos 12 e 34 e z a quantidade de estandes vazios depois do bloco 34, então:

$$x + y + z = 8 \text{ (total de estandes vazios)}$$

O número de soluções inteiras não-negativas dessa equação é: $CR_{3,8} = \frac{10!}{8!2!} = 45$

Como as *startups* são diferentes, é necessário permutar, ou seja, multiplicar por $4! = 24$.
Então, o número de formas de alocar as *startups* seria $45 \times 24 = 1.080$.

Faltando agora, alocar as 6 pessoas nas *startups* sem que nenhuma fique vazia.

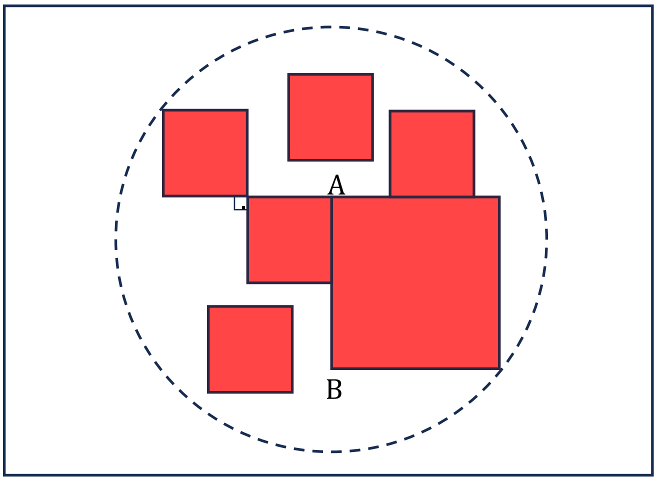
Por serem 6 pessoas podemos distribuir das seguintes formas:

1º caso: $3/1/1/1$: 4 possibilidades permutando esses números
Escolha das pessoas: $C_{6,3} \cdot C_{3,1} \cdot C_{2,1} \cdot C_{1,1} = 20 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
Nesse caso então temos: $120 \times 4 = 480$ possibilidades de distribuir as pessoas

2º caso: $2/2/1/1$: 6 possibilidades permutando esses números
Escolha das pessoas: $C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,1} \cdot C_{1,1} = 15 \times 6 \times 2 \times 1 = 180$
Nesse caso então temos: $6 \times 180 = 1080$ possibilidades de distribuir as pessoas
Somando os casos: $1.080 + 480 = 1.560$ formas de distribuir as pessoas nas *startups*.

Assim, o número pedido é $1080 \times 1560 = 1.684.800$.

Um complexo formado por 6 prédios receberá uma única antena de Wi-Fi, cujo sinal cobrirá todo o conjunto. Essa antena será colocada no topo desse complexo e, sua cobertura circular, com centro no segmento $\overline{AB}$, está identificada pela linha tracejada que contém exatamente dois pontos do complexo, conforme mostra a planta baixa a seguir.

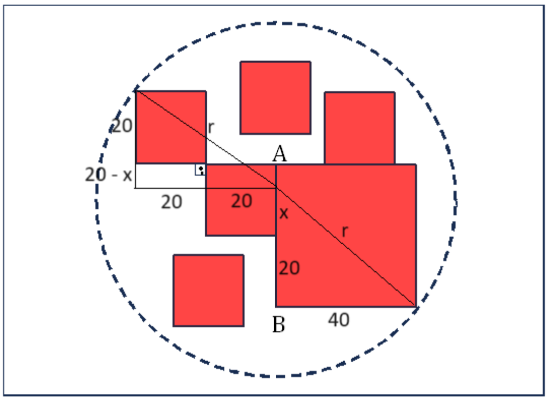


Nessa planta, os prédios são todos em formato de quadrados, sendo que o maior deles tem lado $40\ \mathrm{m}$ e os cinco menores têm lado $20\ \mathrm{m}$. Nessas condições, qual é o percentual da área de cobertura de Wi-Fi ocupada pelo complexo de prédios?
Considere $\pi = 3{,}14$.

50%
47,82%
45,86%
42,71%
38,23%

Gabarito: $\mathbf{45,86\%}$

Ligando o ponto A aos pontos de tangência e completando os triângulos retângulos, têm-se a seguinte figura:



Pelo Teorema de Pitágoras,

$(40 - x)^2 + 40^2 = r^2$

$(20 + x)^2 + 40^2 = r^2$

Subtraindo as equações,

$(40 - x)^2 - (20 + x)^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 60(20 - 2x) = 0 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = 30^2 + 40^2 \Rightarrow r = 50\ \mathrm{m}$

Área dos prédios: $5 \times 20^2 + 40^2 = 3600\ \mathrm{m}^2$
Área de cobertura: $\pi r^2 = 2500\pi = 2500 \times 3{,}14 = 7850\ \mathrm{m}^2$
Percentual: $\frac{3600}{7850} = 45{,}86\%$

Uma agência de publicidade controla os canais de dois influenciadores, A e B, que postam um vídeo sobre tecnologia semanalmente, e está testando estratégias para promoção e aumento da audiência desses canais.

Analisando o comportamento de certo grupo que assiste vídeos de tecnologia, uma pesquisa identificou algumas informações, que estão descritas na seguinte matriz de transição:

$$\begin{array}{cc} & \textit{Estado Precedente} \\ & \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{O} \end{array} \\ P = & \begin{bmatrix} 0{,}40 & 0{,}20 & 0{,}40 \\ 0{,}40 & 0{,}60 & 0{,}40 \\ 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}20 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{A} \\ \text{B} \quad \textit{Novo Estado} \\ \text{O} \end{array} \end{array}$$

Nela, vemos que 40% das pessoas que atualmente seguem o influenciador A querem ver um novo vídeo dele na próxima semana, enquanto 40% pretendem assistir o vídeo do influenciador B e 20% vão para outros canais, indicados por O, em valores aproximados.

Na mesma matriz, entre os que seguem o influenciador B, cerca de 60% vão continuar vendo o próximo vídeo dele, enquanto 20% têm interesse em ir para o canal A e 20% vão mudar para outros canais, indicados por O.

Por último, entre os que atualmente seguem outros influenciadores, O, cerca de 20% vão continuar com eles na próxima semana, 40% vão migrar para o A e 40% vão para o B.

No início da pesquisa, também foi verificado que o canal A detém 20% dessa audiência, o canal B detém 20% e os demais, O, ficam com 60% desse grupo, fornecendo o seguinte vetor de estado inicial:

$$X^0 = \begin{bmatrix} 0{,}20 \\ 0{,}20 \\ 0{,}60 \end{bmatrix}$$

Logo, o vetor de estado depois da primeira semana X^1 é dado pelo produto $P \cdot X^0$:

$$X^1 = P \cdot X^0 = \begin{bmatrix} 0{,}40 & 0{,}20 & 0{,}40 \\ 0{,}40 & 0{,}60 & 0{,}40 \\ 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}20 \\ 0{,}20 \\ 0{,}60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}36 \\ 0{,}44 \\ 0{,}20 \end{bmatrix}$$

Isso significa que, depois da primeira semana, aproximadamente 36% das pessoas do grupo assistirão o vídeo do canal A, 44% assistirão o vídeo do canal B e 20% assistirão o vídeo dos demais canais, O.

Continuando com esse processo e análise, no qual $X^{n+1} = P \cdot X^n$ e sempre usando duas casas decimais após a vírgula, à medida que o tempo passa, depois de qual semana a taxa de visualização estimada do vídeo do canal B apresentará um aumento, em relação à semana anterior, menor do que 3% pela primeira vez?

2ª semana
3ª semana
4ª semana
5ª semana
6ª semana

Gabarito: 3ª semana

Solução:
Depois da primeira semana, o aumento estimado da taxa de visualização do vídeo do canal B é de $\frac{0,44-0,20}{0,20} = 120\%$ em relação a semana anterior.

Depois da segunda semana, o vetor de estado é

$$X^2 = P \cdot X^1 = \begin{bmatrix} 0,40 & 0,20 & 0,40 \\ 0,40 & 0,60 & 0,40 \\ 0,20 & 0,20 & 0,20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,36 \\ 0,44 \\ 0,20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,31 \\ 0,49 \\ 0,20 \end{bmatrix}$$

e verifica-se um crescimento de $\frac{0,49-0,44}{0,44} \cong 11,36\%$ em relação a semana anterior.

Depois da terceira semana, o vetor de estado é

$$X^3 = P \cdot X^2 = \begin{bmatrix} 0,40 & 0,20 & 0,40 \\ 0,40 & 0,60 & 0,40 \\ 0,20 & 0,20 & 0,20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,31 \\ 0,49 \\ 0,20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,30 \\ 0,50 \\ 0,20 \end{bmatrix}$$

e verifica-se um crescimento de $\frac{0,50-0,49}{0,49} \cong 2,04\%$ em relação à semana anterior, menor do que o 3% procurado.